Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER Mathématiques et Applications

M1-ALGEBRE

EXAMEN

4 Janvier 2017

Durée : 3 h

Problème 1 Le but du problème est de classifier les groupes d'ordre 66.

1. Soit H un groupe d'ordre 33. Combien a-t-il de 11-Sylow, de 3-Sylow ? En déduire que H est cyclique.
2. Soit G un groupe d'ordre 66. Montrer que G contient un et un seul sous-groupe distingué d'ordre 11, que l'on notera M dans la suite.
3. Montrer que le groupe quotient G/M possède un sous-groupe distingué d'ordre 3 et en déduire que G possède un sous-groupe distingué d'ordre 33, noté N.
4. Montrer que N possède un unique sous-groupe d'ordre 3. Expliquez pourquoi G possède un unique 3-Sylow.
5. Montrer que G est isomorphe à un produit semi-direct $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
6. Il reste donc à décrire tous les produits semi-directs $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, c'est-à-dire tous les morphismes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/33\mathbb{Z})$.
   (a) Décrire $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/33\mathbb{Z})$ comme produit de groupes cycliques.
   (b) Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 2 dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/33\mathbb{Z})$?
   (c) Quels sont les morphismes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/33\mathbb{Z})$?

Problème 2

Soient A un anneau factoriel, K son corps des fractions, p un élément irréductible de A et L le corps des fractions de l'anneau intègre $A/(p)$. Soit encore $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ un polynôme de $A[X]$ tel que $p \nmid a_n$ et $\overline{P} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a}_i X^i$ est un polynôme irréductible de $L[X]$, où $\overline{a}_i$ est la réduction de a_i dans $A/(p)$.

1. Donner le degré de $\overline{P}$, puis, montrer que P est irréductible dans $K[X]$.
   On pourra utiliser sans preuve le fait que $Q \mapsto \overline{Q}$ définit un morphisme de l'anneau $A[X]$ dans l'anneau $A/(p)[X]$.
2. Montrer, par réduction modulo 3, que $X^3 - X + 2$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
3. Soit $\phi(X) = X^4 + 1$. Montrer que ϕ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
   On pourra utiliser le changement d'indéterminée $Y = X - 1$.
   On se propose de démontrer que $\phi(X) = X^4 + 1$ n'est pas irréductible sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, ceci pour tout nombre premier p.
4. Montrer l'assertion pour $p = 2$.
   Dans la suite, p désignera un nombre premier impair.

5. Soit $\mathbb{F}_{p^2}$ le corps fini à p^2 éléments. Montrer que le polynôme $X^4+1 \in \mathbb{F}_{p^2}[X]$ a une racine dans $\mathbb{F}_{p^2}$.
   On montrera dans un premier temps que le groupe multiplicatif $\mathbb{F}_{p^2}^*$ possède un élément d'ordre 8.
6. Déduire que X^4+1 n'est pas irréductible sur $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Problème 3 Soit $\mathfrak{A}_n$ le sous-groupe alterné du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. On suppose que $n \geq 5$. On pourra utiliser sans justification que $\mathfrak{A}_n$, $n \geq 5$, est un groupe simple, d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_n$. On notera ε le morphisme signature. Pour toute représentation ψ, on notera χ_ψ son caractère.

1. Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est égal au sous-groupe dérivé de $\mathfrak{S}_n$. En déduire que ε est la seule représentation irréductible non-triviale de degré 1 de $\mathfrak{S}_n$.
2. Montrer que pour toute représentation irréductible ψ de $\mathfrak{S}_n$, l'application $g \mapsto \varepsilon(g)\psi(g)$ définit également une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$. On l'appellera représentation ψ tensorisée par ε. Déterminer le caractère de cette représentation en fonction de celui de ψ.
   On fixe une représentation irréductible $\rho : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}(V)$ de $\mathfrak{S}_n$ et un sous-espace W non nul de V, stable pour l'action de $\mathfrak{A}_n$, et tel que la représentation $\theta : \mathfrak{A}_n \to \mathrm{GL}(W)$ correspondante soit irréductible.
3. On fixe une transposition t de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que l'ensemble $\{w+\rho(t)w',\, w, w' \in W\}$ est un sous-espace stable par $\mathfrak{S}_n$.
   On montrera tout d'abord que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par $\mathfrak{A}_n$ et t.
4. En déduire que l'on a l'alternative suivante :
   Premier cas. Soit W est stable par $\rho(t)$, et dans ce cas $V = W$,
   Second cas. Soit W n'est pas stable par $\rho(t)$, et dans ce cas $V = W \oplus \rho(t)(W)$.
5. On suppose dans cette question que l'on est dans le premier cas. Soit $\rho' : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}(V)$ une autre représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$, telle que sa restriction à $\mathfrak{A}_n$ est égale à θ.
   (a) Montrer que
   $$\rho(g)\theta(x)\rho(g)^{-1} = \rho'(g)\theta(x)\rho'(g)^{-1}$$
   pour tous $g \in \mathfrak{S}_n$ et $x \in \mathfrak{A}_n$.
   (b) En déduire utilisant le lemme de Schur qu'il existe une application $\lambda : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{C}^*$ tel que $\rho'(g) = \lambda(g)\rho(g)$ pour tous $g \in \mathfrak{S}_n$.
   (c) Montrer que soit $\lambda = 1$ et $\rho = \rho'$ soit $\lambda = \varepsilon$ et ρ' coincide avec la représentation ρ tensorisée par ε.
6. On suppose dans cette question que l'on est dans le second cas.
   (a) Montrer alors que
   $$\chi_\rho(g) = \begin{cases} 2\chi_\theta(g) \text{ si } g \in \mathfrak{A}_n \\ 0 \text{ si } g \notin \mathfrak{A}_n \end{cases}$$
   (b) Montrer que si ρ' est une autre représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$ telle que sa restriction à $\mathfrak{A}_n$ (non irréductible) possède une composante isomorphe à θ, alors, ρ' est isomorphe à ρ.
7. Montrer que si a_n est le nombre des representations irréductibles de S_n et b_n est le nombre des representations irréductibles de A_n alors $b_n \geq \frac{a_n}{3}$.
8. Comment énoncer ce résultat en termes de classes de conjugaisons ?