Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1 Recherche
Groupes Classiques et Géométrie

Examen, 1ère session

24 Mai 2012

Durée : 3 heures

Problème 1. *(14 pts.)* On fixe deux nombres premiers impairs distincts p et q. On rappelle les résultats suivants sur le symbole de Legendre

$$a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \ \binom{a}{p} = a^{\frac{p-1}{2}}, \quad \binom{a}{p} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ est un carré modulo } p \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On veut montrer la loi de réciprocité quadratique de Gauss

$$\binom{p}{q}\binom{q}{p} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

On considère la partie X de $\mathbb{F}_q^p$ définie par

$$X := \{(x_1, \dots, x_p),\ x_i \in \mathbb{F}_q,\ \sum_{i=1}^{p} x_i^2 = 1\}.$$

L'idée est de calculer son cardinal, modulo p par deux méthodes.
1) On fait agir $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par permutation cyclique sur $\mathbb{F}_q^p$:

$$k.(x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_{1+k}, x_{2+k}, \dots, x_{p+k}),$$

où l'addition des indices se fait dans le groupe cyclique $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
a) Montrer que cette action définit par restriction une action sur X.
b) Montrer que les orbites à un élément de cette action sont de la forme $\{(x, x, \dots, x)\}$.
c) Montrer par un cas par cas que le nombre de solutions de l'équation $px^2 = 1$ dans $\mathbb{F}_q$ est égal à $1 + \binom{p}{q}$.
d) En déduire que $|X| = 1 + \binom{p}{q}$ modulo p.

2) Soit A la matrice $p \times p$ à coefficients dans $\mathbb{F}_q$:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 1 & 0 & \\ & & & & & & & a \end{pmatrix},$$

où on a posé $a = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.
a) Montrer que A est congruente à la matrice identité de $M_p(\mathbb{F}_q)$; on notera P une matrice telle que $A = {}^tPP$.
b) Expliciter en fonction de P, une bijection entre X et

$$Y = \{(y_1, z_1, \dots, y_{\frac{p-1}{2}}, z_{\frac{p-1}{2}}, x_p),\ 2(y_1 z_1 + \dots y_{\frac{p-1}{2}} z_{\frac{p-1}{2}}) + a x_p^2 = 1\}.$$

c) Rappeler quel est le cardinal d'un hyperplan affine de $\mathbb{F}_q^d$.
d) Calculer le cardinal de Y en fonction de $\big(a \quad p\big)$ en distinguant deux cas : $(y_1, \dots, y_{\frac{p-1}{2}}) = 0$, $(y_1, \dots, y_{\frac{p-1}{2}}) \neq 0$.
3) Déduire la loi de réciprocité quadratique.
4) 27 est-il un carré modulo 47 ?
5) Epilogue : on note $O(m, \mathbb{F}_q)$ le groupe orthogonal qui stabilise la forme quadratique $\sum_{k=1}^m x_k^2$ sur $\mathbb{F}_q$. Expliquez la formule suivante

$$|O(p, \mathbb{F}_q)|/|O(p-1, \mathbb{F}_q)| = q^{\frac{p-1}{2}}(q^{\frac{p-1}{2}} + (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}).$$

On pourra faire agir $O(p, \mathbb{F}_q)$ sur X et décrire son stabilisateur.

Problème 2. Le problème est un batifolage autour des isomorphismes exceptionnels $PSU(1,1) \simeq SO_0(2,1)$, $PSL_2(\mathbb{R}) \simeq SO_0(2,1)$ suivi d'une réflexion plus profonde sur la géométrie cachée derrière l'isomorphisme $PSU(1,1) \simeq PSL_2(\mathbb{R})$ qui en résulte. On adoptera systématiquement la notation suivante : si G est un sous-groupe d'un groupe linéaire, alors PG désignera son quotient par le sous-groupe de ses homothéties.
A. *(6 points)* On étudie dans cette partie la quadrique $\mathcal{C}$ associée à la forme quadratique de $\mathbb{R}^4$ donnée par $q = x^2 + y^2 - z^2 - t^2$:

$$\mathcal{C} := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 1\}.$$

1) Montrer en utilisant le théorème de submersion que $\mathcal{C}$ est une sous-variété de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$.
2) Décrire l'intersection de $\mathcal{C}$ avec le plan $\{(x, y, 0, 0),\ x, y \in \mathbb{R}\}$. En déduire que

$(1,0,0,0)$ et $(-1,0,0,0)$ sont dans la même composante connexe de $\mathcal{C}$.
3) Montrer que $O(2,2)$ agit transitivement (on énoncera avec clarté un théorème du cours) sur $\mathcal{C}$ et que $O(2,2)/SO_0(2,2)$ agit (transitivement) sur les composantes connexes de $\mathcal{C}$.
4) (Cours) Donner des représentants explicites de $O(2,2)/SO_0(2,2)$ dans $O(2,2)$. Déduire que $\mathcal{C}$ est connexe.

B. *(11 points)* On note

$$U(1,1) := \{A \in M_2(\mathbb{C}),\ A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\},\ SU(1,1) := U(1,1) \cap SL_2(\mathbb{C}).$$

1) Montrer que $U(1,1)$ est le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & \lambda\bar{b} \\ b & \lambda\bar{a} \end{pmatrix}$, où λ est un complexe de module 1 et a et b deux complexes tels que $|a|^2 - |b|^2 = 1$.
2) a) Montrer que $SU(1,1)$ est une sous-variété connexe de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$. Montrer que $SU(1,1)$ est un groupe de Lie connexe.
b) Expliquer pourquoi l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$ est incluse dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(1,1) \cap \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.
c) Montrer que $\mathfrak{u}(1,1) \cap \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{\begin{pmatrix} iu & v+iw \\ v-iw & -iu \end{pmatrix},\ u, v, w \in \mathbb{R}\}$.
d) En déduire $\mathfrak{su}(1,1) = \mathfrak{u}(1,1) \cap \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.
3) Montrer que $SU(1,1)$ agit par conjugaison sur son algèbre de Lie.
4) Montrer que cette action fournit un isomorphisme exceptionnel $PSU(1,1) \simeq SO_0(2,1)$.
On sera amené à décrire l'algèbre de Lie de $SO_0(2,1)$ et à calculer sa dimension.

C. *(3 points)* Montrer que $PSL_2(\mathbb{R})$ est isomorphe à $SO_0(2,1)$.
On ne donnera que les étapes de la preuve.

D. *(9 points)* On considère l'action par homographie de $PGL_2(\mathbb{C})$ sur la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ donnée par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

1) La droite des réels de $\mathbb{C}$ prolongée à l'infini sera appelée droite projective réelle $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Montrer que le stabilisateur de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dans $PGL_2(\mathbb{C})$ est $PGL_2(\mathbb{R})$.
On pourra, à l'aide d'une méthode inouye, utiliser la notion de repère projectif complexe et réel.
2) a) Définir de même la droite projective imaginaire de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et trouver un élément de $PGL_2(\mathbb{C})$ qui envoie la droite projective réelle sur la droite projective imaginaire.
On pourra commencer par exhiber une homographie simple qui envoie $\mathbb{R}$ sur $i\mathbb{R}$.

b) Quel est le stabilisateur de la droite projective imaginaire ?
3)a) Montrer que le stabilisateur G dans $GL_2(\mathbb{C})$ de $C := \{(z, z'), z \in i\mathbb{R}z'\} \subset \mathbb{C}^2$ est conjugué au sous-groupe $\mathbb{C}^* GL_2(\mathbb{R})$ engendré par les homothéties complexes et $GL_2(\mathbb{R})$.
b) Montrer que C est le cône isotrope d'une forme hermitienne bien choisie et en déduire une injection $SU(1,1) \hookrightarrow G \cap SL_2(\mathbb{C}) \simeq SL_2(\mathbb{R})$.
c) Montrer que cette injection de $SU(1,1)$ vers $SL_2(\mathbb{R})$ est un isomorphisme.