

EXERCICES SUR LA CONJECTURE JACOBIENNE POUR LES AGREGATIFS ET LES PASSIONNÉS DE MATHÉMATIQUES

Proposés par **Pascal Kossivi ADJAMAGBO**

Dans le cadre de son interview avec Philippe CALDERO sur sa chaîne

ACTE I

Exercice 1 (sur la preuve d'une généralisation de la conjecture jacobienne en une variable en caractéristique 0). Soit K un anneau commutatif intègre infini de caractéristique nulle, c'est-à-dire que pour tout entier n et tout élément a de K non nul, $n \cdot a = 0$ si et seulement si $n = 0$ ou $a = 0$.

Prouver qu'une application polynomiale de K dans K est inversible et d'inverse polynomiale si et seulement si sa dérivée est une fonction constante de valeur un élément inversible de K .

Exercice 2 (sur la preuve d'une généralisation de la conjecture jacobienne en une variable en caractéristique positive). Soit K un anneau commutatif intègre infini de caractéristique $p > 0$, c'est-à-dire que pour tout entier n et tout élément a de K non nul, $n \cdot a = 0$ si et seulement si n est un multiple de p ou $a = 0$.

Prouver que p est premier et qu'une application polynomiale de K dans K est inversible et d'inverse polynomiale si et seulement si sa dérivée est une fonction constante de valeur un élément inversible de K , et son degré n'est pas un multiple de p .

Exercice 3 (sur la preuve de la conjecture jacobienne réelle en une variable). En utilisant les théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues ou dérivables d'une variable réelle, prouver qu'une application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un difféomorphisme si et seulement si sa dérivée ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (sur la preuve de la conjecture jacobienne réelle forte en une variable). En utilisant les théorèmes fondamentaux sur les propriétés de la borne supérieure et de la borne inférieure de $\mathbb{R}$ et sur les fonctions continues ou dérivables d'une variable réelle, prouver que pour une application polynomiale P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. P est un homéomorphisme.
2. P est « localement injective », c'est-à-dire injective sur un voisinage ouvert de chaque point de $\mathbb{R}$.
3. La dérivée P' de P ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$.

ACTE II

Exercice 5 (sur l'injectivité d'une application polynomiale de K^n dans K^n dont le jacobien ne s'annule jamais et dont les composantes sont de degré au plus 2). Soient n un entier > 0 , K un anneau commutatif infini dont 2 est un élément inversible, et F une application polynomiale de K^n dans K^n , définie par n polynômes à n indéterminées sur K et à coefficients dans K de degré au plus 2.

On rappelle que la formule exacte de Taylor pour les polynômes à n indéterminées et à coefficients dans un corps commutatif de caractéristique 0, et de degré au plus d (voir par exemple Lelong-Ferrand et Arnaudies, *Cours de mathématiques*, Tome 1, Algèbre, 3^e édition, 1978, chapitre IV, Théorème IV.7.4) est valable lorsque le corps commutatif de caractéristique 0 est remplacé par un anneau commutatif dans lequel $d!$ est inversible.

En utilisant le formalisme de la formule de Taylor pour les fonctions de plusieurs variables réelles, pour deux points quelconques x et y de K^n , en notant $D(F)(a)$ la différentielle de F en un point a de K^n qui est une application linéaire de K^n dans K^n , et $D^{(2)}(F)(a)$ la différentielle seconde de F en a qui est une application bilinéaire symétrique de $K^n \times K^n$ dans K^n , la formule exacte de Taylor pour F entre les points x et y de K^n s'écrit donc de manière plus compacte :

$$F(y) = F(x) + D(F)(x) \cdot (y - x) + \frac{1}{2} D^{(2)}(F)(x) \cdot (y - x, y - x).$$

1. Pour deux points quelconques x et y de K^n , en notant a^t la transposée d'un élément a de K^n , et $J(F)(a)$ la matrice jacobienne de F en un point a de K^n , en écrivant cette formule exacte de Taylor pour F entre les points $\frac{x+y}{2}$ et y , puis entre $\frac{x+y}{2}$ et x , prouver « l'identité remarquable » :

$$F(y)^t - F(x)^t = J(F)((x + y)/2) \cdot (y - x)^t.$$

2. En déduire que si le jacobien de F ne s'annule en aucun point de K^n , alors F est injective.

Exercice 6 (sur la preuve de la conjecture jacobienne en toute caractéristique différente de 2 pour les applications polynomiales dont les composantes sont de degré au plus 2). Soient n un entier > 0 , K un anneau commutatif infini et intègre dont 2 est un élément inversible, et F une application polynomiale de K^n dans K^n , définie par n polynômes à n indéterminées sur K et à coefficients dans K de degré au plus 2, dont le jacobien est un élément inversible de K .

On rappelle que F est un automorphisme polynomial, c'est-à-dire que F est bijectif et d'inverse polynomiale (à coefficients dans K) si et seulement si pour un anneau commutatif L contenant K , l'application F_L de L^n dans L^n définie par F est un automorphisme polynomial (voir par exemple Bass, Hyman ; Connell, Edwin H. ; Wright, David (1982), "The Jacobian conjecture : Reduction of degree and formal expansion of the inverse", Bulletin of the American Mathematical Society, 7 (2) : 287–330, Remark (1.1) 3). Appelons cette propriété « la propriété d'extension de l'anneau des coefficients d'une application polynomiale ».

On rappelle également que, puisque le jacobien de F est un polynôme non nul, et induit donc une extension séparable de corps, il résulte du « théorème d'isomorphisme pour les morphismes injectifs de variétés algébriques » (voir K. Adjamagbo, *Sur les morphismes injectifs des variétés algébriques affines*, Comm. Algebra 24 (1996), no. 3, 1117-1123) que si K est un corps algébriquement clos, alors F est un automorphisme polynomial si et seulement si F est injectif.

1. Prouver, grâce à l'exercice précédent et à un théorème classique de la théorie des corps commutatifs, que F est un automorphisme polynomial.
2. En déduire que la conjecture jacobienne pour un nombre quelconque de variables et en caractéristique quelconque différente de 2 est vraie pour les applications polynomiales dont les composantes sont de degré au plus 2.

Exercice 7 (sur la preuve de la conjecture jacobienne réelle pour les applications polynomiales dont les composantes sont de degré au plus 2). On rappelle que, d'après « le théorème de Białynicki-Birula et Rosenlicht sur les endomorphismes injectifs d'une variété algébrique réelle » dans leur article "*Injective morphisms of real algebraic varieties*", Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 287-329, toute application polynomiale injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, et même toute application rationnelle de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, pour tout entier $n > 0$, est surjective.

1. Prouver grâce à l'exercice précédent que pour tout entier $n > 0$, toute application F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ dont le jacobien ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}^n$ et dont les composantes sont de degré au plus 2 est un difféomorphisme.
2. En déduire que la conjecture jacobienne réelle pour un nombre quelconque de variables est vraie pour les applications polynomiales dont les composantes sont de degré au plus 2.

Exercice 8 (sur la normalité d'une extension de corps commutatifs de degré 2). On rappelle qu'un corps commutatif L qui est une extension algébrique d'un corps commutatif K est « une extension normale de K » si le polynôme minimal sur K de tout élément de L est scindé sur L , et que L est « une extension galoisienne de K » si L est une extension séparable et normale de K .

1. Prouver que tout corps commutatif L qui est une extension de degré 2 d'un corps commutatif K est une extension normale de K .
2. En déduire que tout corps commutatif L qui est une extension séparable de degré 2 d'un corps commutatif K est une extension galoisienne de K .