UNE BREVE HISTOIRE DES FORMES BILINEAIRES

Le but du cours est de résoudre l'équation du second degré à plusieurs inconnues et de montrer ainsi comment les formes bilinéaires jouent leur rôle primordial. On va donc introduire les formes quadratiques avant les formes bilinéaires, c'est l'approche, disons heuristique, à défaut d'être l'approche classique.

Tout le monde sait résoudre l'équation du second degré à une inconnue x : $ax^2+bx+c=0$ sur un corps, l'astuce étant de faire "disparaitre" le terme en x, ce qui est possible si le corps est de caractéristique différente de 2, ce que l'on supposera par la suite. On a constaté que
1. b^2-4ac était un objet important,
2. Le corps sur lequel on résout l'équation joue un rôle essentiel sur les résultats obtenus.

$$\boxed{\text{Comment "résoudre" l'équation du second degré à } n \text{ variables ?}}$$

On veut donc résoudre l'équation $P(x_1,\dots,x_n)=0$, où P est un polynôme de degré 2.

Tous les espaces vectoriels seront supposés de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$.

1 Homogénéisation : la forme quadratique.

L'idée de départ est d'ajouter une variable afin de se ramener à un polynôme *homogène* de degré 2.

$$P(x_1,\dots,x_n)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} P^{\#}(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})=0 \\ x_{n+1}=1 \end{cases},$$

où $P^{\#}$ est le polynôme homogène de degré 2 obtenu en multipliant le terme de degré 1 par x_{n+1} et en multipliant le terme de degré 0 par x_{n+1}^2.

Par exemple, si $P=X_1^2+X_2^2+2X_1-X_2+3$, alors $P^{\#}=X_1^2+X_2^2+2X_1X_3-X_2X_3+3X_3^2$.

On se ramène, quitte à couper par un hyperplan affine, à l'étude des polynômes homogènes de degré 2 : les formes quadratiques. Si par exemple $n=2$ alors on voit que les équations du second degré à deux variables (dont les solutions sont appelées "coniques"), sont obtenues par intersection d'un cône de dimension 3 et d'un hyperplan (d'où bien sûr leur appellation).

2 Formes quadratiques vs formes bilinéaires symétriques.

Toute l'astuce consiste à transformer le degré 2 en deux fois le degré 1.

Pas con le mec !

On va substituer l'étude de la forme quadratique q par celle de la forme bilinéaire b donnée par

$$\boxed{b(x,y) = 1/2(q(x+y) - q(x) - q(y))}$$

On vérifie que c'est bien une forme bilinéaire, en fait, il suffit de la vérifier pour un base de polynômes homogènes de degré 2 , par exemple $q = x_i x_j$.
Questions :

$$\boxed{\text{Pourquoi des formes, pourquoi bilinéaires, pourquoi symétriques ?}}$$

• On travaille sur des formes parce qu'on est parti d'une seule équation, on étudie donc une fonction sur un espace à valeur dans un corps.

• Le fait de travailler sur des formes bilinéaires va nous permettre d'utiliser ce que l'on sait sur le degré 1 (les applications linéaires, la formule du rang, le déterminant).

• La symétrie permet l'unicité, si chère aux mathématiciens. A une forme quadratique q correspond une unique forme bilinéaire symétrique b associée, c'est à dire un unique b telle que $b(x,x) = q(x)$. Sans la symétrie, il n'y a plus unicité, puisque par exemple, toute forme bilinéaire antisymétrique a vérifie $a(x,x) = 0$. On verra un peu plus loin que la symétrie permet si le corps est réel de simplifier nettement l'étude.

Montrons donc l'existence et l'unicité :
l'existence vient de la formule ci-dessus donnant b en fonction de q.

Pour l'unicité, supposons b, b' bilinéaires symétriques vérifiant $b(x,x) = q(x) = b'(x,x)$. Posons $\epsilon = b - b'$. Alors ϵ est une forme bilinéaire symétrique telle que $\epsilon(x,x) = 0$ pour tout x. Donc, $\epsilon(x+y, x+y) = 0$, ce qui implique $\epsilon(x,x) + \epsilon(x,y) + \epsilon(y,x) + \epsilon(y,y) = 0$ par bilinéarité, puis par symétrie $2\epsilon(x,y) = 0$ et finalement $\epsilon = 0$ car 2 est inversible. On a donc bien $b = b'$.

3 Réinterprétons la bilinéarité.

Cette façon de considérer la bilinéarité en terme de dualité va être essentielle pour l'étude de l'orthogonalité.
On peut bien entendu comprendre la bilinéarité comme étant une double linéarité, une à gauche, et une à droite. Mais il est plus utile de la voir ainsi : b est bilinéaire si elle vérifie

1. x fixé, $b(x,-) : E \to \mathbb{K}$ est linéaire, c'est à dire appartient au dual E^*,
2. L'application $\phi_b : E \to E^*$, $x \mapsto b(x,-)$ est linéaire.

Il est utile de faire le point sur le chemin parcouru : on a remplacé l'étude du polynôme P de degré 2 par l'étude d'une forme quadratique $q = P^\#$ qui est cette fois homogène, puis l'étude de la forme quadratique q par celle de la forme bilinéaire symétrique b, et enfin celle de b par celle de l'application linéaire ϕ_b.

Faisons maintenant quelques petits calculs pour comprendre les liens entre b et ϕ_b.
Soit $(e_i) = \underline{e}$ une base de E et $\mathrm{Mat}_{\underline{e}} b = A = (a_{ij})$ la matrice de b dans E, définie par $a_{ij} = b(e_i, e_j)$. Alors le lien entre ϕ_b et b peut être donné par

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{e}^*}\phi_b = \mathrm{Mat}_{\underline{e}} b}$$

Montrons cela. Il suffit de montrer que pour tout j, $\phi_b(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i^* = \sum_i a_{ji} e_i^*$ (car A est symétrique), c'est à dire que pour tout j, k, $\phi_b(e_j)(e_k) = \sum_i a_{ji} e_i^*(e_k)$ et finalement cette égalité est équivalente à $b(e_j, e_k) = a_{jk}$, ce qui est clair par définition.
Comme corollaire, on obtient l'équivalence

$$\boxed{\phi_b \text{ est un isomorphisme ssi } \det A \neq 0}$$

4 Orthogonalité.

L'orthogonalité n'est plus à présenter tant elle est essentielle en géométrie. Elle permet entre autres de construire des sommes directes, de faire des récurrences...
Elle peut s'interpréter agréablement à l'aide du morphisme ϕ_b :

Soit F un sous-espace vectoriel de E, alors on définit son orthogonal pour la forme b

$$F^\perp = \{x,\, b(x,y) = 0,\, \forall y \in F\}$$

Considérons la restriction r_F d'une forme linéaire sur E au sous-espace F.

$$r_F \,:\, E^* \to F^*,\ f \mapsto f\mid_F .$$

Une façon plus féconde, quoique plus abstraite, de présenter $F^\perp$ est la suivante :

$$\boxed{F^\perp = \mathrm{Ker}(r_F \circ \phi_b)}$$

Preuve : $x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall y \in F$, $b(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in F$, $\phi_b(x)(y) = 0 \Leftrightarrow \phi_b(x)\mid_F = 0 \Leftrightarrow (r_F \circ \phi_b)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(r_F \circ \phi_b)$.

On voit la nécessité de travailler dans le cadre où ϕ_b est un isomorphisme, dont on a trouvé une condition à la fin de la section précédente.

Définition : On dit que la forme bilinéaire b est non dégénérée si une des conditions équivalentes est satisfaite :

1. ϕ_b et un isomorphisme
2. ϕ_b est injectif
3. $\mathrm{Ker}\phi_b = 0$
4. $E^\perp = 0$

Ces équivalences sont immédiates en utilisant les définitions et (à la limite) la formule du rang.

On a en particulier :

$$\boxed{\text{Si } b \text{ est non dégénérée, alors } \dim F^\perp = \dim E - \dim F}$$

Effectivement, comme ϕ_b est bijective, on a $\dim F^\perp = \dim \mathrm{Ker}(r_F)$. Or r_F est surjective car toute forme g sur F peut être prolongée en une forme f sur E telle que $f \mid F = g$, il suffit pour cela de fixer un supplémentaire de F et de définir f égale à g sur F et nulle sur ce supplémentaire. La formule du rang dit alors que $\dim \mathrm{Ker}(r_F) = \dim E^* - \dim F^* = \dim E - \dim F$.

Comme corollaire on a le fait que l'orthogonal est involutif, ce qui est très pratique

$$F = (F^\perp)^\perp$$

On a effectivement l'inclusion évidente et l'inclusion inverse se prouve par une considération de dimension.

5 Résolution de $q(u) = 0$

On en sait maintenant plus qu'assez pour "résoudre" l'équation du second degré, ou disons pour étudier son ensemble de solutions.
Tout d'abord, on va voir qu'on peut se ramener au cas où q est une forme quadratique non dégénérée, ie sa forme bilinéaire symétrique associée est non dégénérée.
Soit S_q l'ensemble des solutions de l'équation considérée

$$S_q = \{u \in E,\, q(u) = 0\}$$

Considérons un supplémentaire F de $\mathrm{Ker}\phi_b$ dans E et soit q' la restriction de q à F. Alors :

$$\boxed{q' \text{ est non dégénérée et } S_q = \mathrm{Ker}\phi_b \times S_{q'}}$$

q' est clairement non dégénérée puisque $\mathrm{Ker}\phi_{b'} = \mathrm{Ker}\phi_b \cap F = 0$, où b' est la forme bilinéaire associée à q'.
Montrons la double inclusion dans l'égalité :
Soit u dans S_q, et notons $u = x + y$ a décomposition dans $\mathrm{Ker}\phi_b \oplus F$. On a $q(u) = 0$ ssi $q(x + y) = 0$ ssi $b(x + y, x + y) = 0$ et en développant, on trouve $q'(y) = b(y, y) = 0$ puisque tous les autres termes s'annulent. Donc x peut être pris quelconque dans $\mathrm{Ker}\phi_b$ et $y \in S_{q'}$.

La réciproque est claire : si $u = x + y$ avec $x \in Ker\phi_b$, $y \in S_{q'}$ alors le même calcul donne $q(u) = 0$.

Il suffit donc de calculer $S_{q'}$ avec q' non dégénérée.
On suppose dorénavant que q est une forme quadratique non dégénérée.
L'idée est que l'ensemble S_q étant en général infini, il faut d'abord bien définir ce que signifie le terme "résoudre" l'équation. Il s'agit de déterminer des données métriques, linéaires, topologiques...
Exemple : D'un point de vue métrique, il faut savoir faire la différence entre un cercle et une ellipse, d'un point de vue linéaire et topologique, il n'y a pas de différence puisqu'on peut passer d'un cercle à une ellipse par le groupe linéaire.
D'un point de vue linéaire, l'union de deux droites (affines) parallèles se distingue d'une hyperbole, alors que topologiquement il n'y a aucune différence puisqu'elle sont homéomorphes. Topologiquement, une ellipse et une hyperbole sont bien distinctes.

On va donc chercher à comprendre S_q d'un point de vue métrique, linéaire, et on donnera une idée pour comprendre le point de vue topologique.

Supposons que E est un espace euclidien.
Soit q une forme quadratique non dégénérée sur E et g dans $\mathrm{GL}(E)$, alors si on définit q' par $q'(u) = q(g(u))$, alors q' est une forme quadratique non dégénérée et $S_{q'} = g^{-1}(S_q)$. Effectivement, la dernière égalité est classique puisqu'on effectue un "changement de variable". Pour montrer que q' est non dégénérée, il suffit de dire que si A est la matrice de q dans une base fixée et si P est la matrice de g dans cette même base, alors la matrice de q' est donnée par la formule de congruence $A' =^t PAP$ et $\det A' = (\det P)^2 \det A \neq 0$.
En conclusion, on ne change pas la nature métrique, resp. linéaire, en remplaçant q en remplaçant q par $q' = q \circ g$, où $g \in O(n)$, resp. $g \in \mathrm{GL}(E)$.

Etude métrique.

Dans ce cas $g \in O(n)$ et le corps de base est $\mathbb{R}$. Donc $A' =^t PAP = P^{-1}AP$ car ${}^tPP = Id$. A' et A sont donc non seulement congruentes mais semblables ! Il est temps de rappeler le théorème (attention, ce théorème n'est valable uniquement dans le cas réel).

Théorème 1 *Soit A une matrice symétrique réelle, alors elle est $O(n)$-semblable à une matrice diagonale réelle, les éléments de la diagonale sont les valeurs propres de A.*

Conclusion, il existe une matrice orthogonale g telle que $g^{-1}(S_q)$ ait pour équation :

$$\boxed{\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \ldots + \lambda_n X_n^2 = 0}$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ sont les valeurs propres de A.
On peut voir cette nouvelle équation comme une équation obtenue à partir de $q(u) = 0$, après changement de variables linéaire, et où les nouvelles variables correspondent à un repère orthonormé.

Exemple. Par exemple, supposons que les valeurs propres de A soient toutes strictement positives. Alors l'équation $q(u) = 1$ donne une ellipsoïde dont les axes sont portés par des vecteurs propres de A, ces axes sont orthogonaux car A est diagonalisable en base orthonormée.

Etude linéaire.

On veut connaître S_q quitte à le transformer par un élément de $\mathrm{GL}(E)$. Encore une fois, on cherche donc une forme quadratique, congruent à q et particulièrement simple et agréable. Il est temps de rappeler le thoéorème de Sylvester :

Théorème 2 *Soit A une matrice symétrique réelle inversible, alors il existe un unique couple d'entiers positifs (p, q) avec $p + q = n$, tel que A soit congruente à la matrice* $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$.

Pour des raisons de simplicité, nous avons donné une version du théorème de Sylvester dans le cas non dégénéré, sinon, la somme $p + q$ est égale au rang et non pas la dimension n de l'espace. Rappelons qu'une façon pratique d'introduire p et q est de dire que p est la dimension maximale d'un sous-espace sur laquelle la forme quadratique est définie positive. Une autre façon de le dire est que p est le nombre de valeurs propres positives de A. Conclusion, il existe une matrice orthogonale g telle que $g^{-1}(S_q)$ ait pour équation :

$$\boxed{X_1^2 + \ldots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \ldots - X_n^2 = 0}$$

Exemple important. On peut regarder le théorème de Sylvester sur un exemple que l'on connaît parfaitement sous une autre forme : l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sur $\mathbb{R}$. Sortons donc notre grosse artillerie sur cette pauvre petite équation qui n'en demandait pas tant.
Tout d'abord, on rend l'équation homogène : $2ax^2 + 2bxy + 2cy^2 = 0$. On travaille donc sur cette forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix}$ (on comprend mieux pourquoi j'ai multiplié par 2). On va travailler dans le cas où la forme est non dégénérée, c'est à dire son déterminant Δ non nul. Or, $\Delta = 4ac - b^2$, tiens-tiens...D'après le théorème de Sylvester, il y a trois cas possibles selon si la signature est (2,0), (1,1), (0,2), mais les cas (2,0) et (0,2) donnent le même résultat quitte multiplier l'équation par -1. Donc, on se ramène à deux cas. Dans le premier cas, les valeurs propres sont de même signe, donc le déterminant est positif (on rappelle que le déterminant est le produit des valeurs propres) et dans le second les valeurs propres sont de signe opposé, et donc le déterminant est négatif. Conclusion, si $\Delta > 0$, l'équation devient $X^2 + Y^2 = 0$, donc au final pas de solution car on veut $Y = 1$. Si $\Delta < 0$ alors l'équation devient $X^2 - Y^2 = 0$ donc deux droites distinctes solutions $Y = X$ et $Y = -X$ et la contrainte $Y = 1$ donne deux racines distinctes (ou une seule si $a = 0$).

Etude topologique.

On ne donnera pas tous les détails, mais il est intéressant d'avoir une idée de la méthode. Soit encore q la forme quadratique supposée non dégénérée. On introduit l'ensemble $O(q)$ des éléments du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ qui laisse q invariante, ie g tels que $q(g(u)) = q(u)$ pour tout u. Une réécriture matricielle donne

$$O(q) = \{P,^t PAP = A\}$$

où A est la matrice de q dans la base fixée. On remarque que $O(q)$ est le stabilisateur de A pour l'action de congruence $(P, B) \mapsto^t PBP$. $O(q)$ est donc un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ (il faut tout d'abord vérifier à l'aide du déterminant que $O(q)$ est bien dans $\mathrm{GL}(E)$). D'après ce qui a déjà été vu sur les stabilisateurs :

$$\boxed{\text{Si } q' \text{ congruente à } q, \text{ alors } O(q') \text{ isomorphe à } O(q).}$$

Ce qui signifie que l'étude de tous les $O(q)$ possibles, à isomorphisme près, se résume à l'étude de $O(q)$ pour chaque classe de congruence, c'est à dire $n+1$ classes dans le cas non dégénéré par le théorème de Sylvester.

Exemple fondamental, le produit scalaire : Si les valeurs propres de A sont toutes positives, c'est à dire, si q est de signature $(n, 0)$, alors q est congruente à l'identité et donc $O(q)$ est isomorphe au fameux groupe orthogonal $O(n)$, où

$$O(q) = \{P,^t PP = I_n\}$$

Il faut toujours avoir cela en tête lorsque l'on parle du produit scalaire.

Maintenant, quel est le rapport avec notre étude. Il se trouve que comme $O(q)$ respecte la forme quadratique q (il est fait pour ça !). Ce groupe agit sur S_q, puisque si $u \in S_q$ et $g \in O(q)$, alors $q(g(u)) = q(u) = 0$ et donc $g(u) \in S_q$. Un théorème, valable sur tout corps assure que cette action est transitive, ie si $x, y \in S_q$, il existe $g \in O(q)$ tel que $g(x) = y$. L'étude des actions nous dit donc que S_q est le quotient de $O(q)$ par un stabilisateur. On a donc

$$S_q \simeq O(q)/H$$

On montre que cette bijection est un homéomorphisme. Et on peut déduire la topologie de S_q et partir de celle de $O(q)$. Par exemple, si q est une forme euclidienne, alors $O(n)$ est compact donc S_q l'est aussi, de même on montre ainsi que S_q possède au plus deux composantes connexes. La classe...