

Fiche de révisions sur les groupes

- Comment construit-on l'isomorphisme de groupes (multiplicatifs) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \simeq \prod_i (\mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z})^*$, où $n = \prod_i p_i^{n_i}$ est la décomposition de n en facteurs premiers ?
- Décomposer selon le théorème de structure le groupe abélien $(\mathbb{Z}/600\mathbb{Z})^*$.
- Donner la définition d'un produit semi-direct.
- Donner plusieurs exemples de situations où l'on reconnaît que G est un produit semi-direct à partir de deux sous-groupes H et K .
- Combien y a-t-il de groupes abéliens d'ordre 180 à isomorphisme près ?
- Pour quel type de groupes d'ordre n on sait que pour tout d divisant n , il existe un sous-groupe d'ordre d ?
- Décrire $\text{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.
- Comment montre-t-on que le groupe des isométries du tétraèdre régulier est isomorphe à \mathfrak{S}_4 ?
- Combien \mathfrak{S}_p , p premier, possède-t-il de p -Sylow ?
- Décrire tous les produits semi-directs (non directs) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
- Pour p premier, quel est l'ordre de $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$?
- Citer deux actions à gauche classiques de G sur lui-même. En déduire deux résultats en termes de morphismes.
- Soit H un sous-groupe de G . Décrire l'action de G sur l'ensemble des classes à gauche G/H . Que se passe-t-il si l'action de H sur G/H est triviale ?
- Quels sont les sous-groupes d'indice 2 de \mathfrak{S}_n ?
- Comment montre-t-on que le centre d'un p -groupe est non trivial ?
- Citer tous les théorèmes de Sylow (existence, transitivité, nombre de p -Sylow, critère d'inclusion dans un p -Sylow).
- Montrer que l'indice du normalisateur d'un p -Sylow est égal au nombre de p -Sylow. Combien ce normalisateur possède-t-il de p -Sylow ?
- Quels sont les p -Sylow d'un groupe cyclique, d'un groupe abélien fini ?