Université Claude Bernard Lyon 1

LICENCE MATH VI
REPRÉSENTATIONS DES GROUPES FINIS

Examen du 5 juin 2015

Durée : 3h

Le sujet comporte deux questions de cours et deux problèmes indépendants. Le recours à des documents ou à des appareils électroniques est interdit. Les réponses devront être rédigées avec précision et clarté.

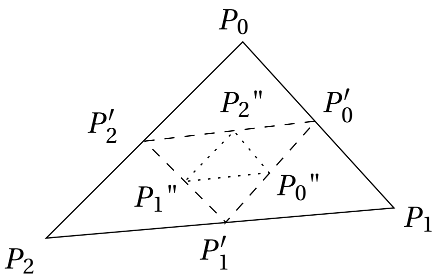
Questions de cours

Soit G un groupe fini. Considérons deux représentations irréductibles V, V' de G et un morphisme de G-modules $f : V \to V'$.

1. Démontrer que f est l'application nulle ou bien que f est un isomorphisme.
2. Supposons que l'on ait $V' = V$. Démontrer que f est une homothétie.

Problème 1

Soit $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n = P_0$ des points du plan, que l'on voit comme les sommets d'un polygone Π. On appelle *polygone dérivé* de Π le polygone dont les sommets $P'_0, P'_1, \ldots, P'_{n-1}, P'_n = P'_0$ sont les points tels que P'_k soit le milieu du segment $[P_k, P_{k+1}]$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. La figure ci-dessous illustre le cas $n = 3$.



On se propose de démontrer que, lorsqu'on itère ce procédé, les polygones obtenus tendent vers le centre de gravité des points $P_0, \ldots, P_{n-1}$. Pour cela, on identifie le plan à $\mathbf{C}$ et on note z l'application $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ envoyant $\overline{k}$ sur l'affixe du point P_k pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Le polygone dérivé correspond à l'application ∂z définie par

$$\partial z(\overline{k}) = \frac{1}{2}(z(\overline{k}) + z(\overline{k} + \overline{1})).$$

L'objectif est donc de démontrer que la suite de fonction $(\partial^p z)_{p \geqslant 0}$, définie par récurrence en posant

$$\partial^0 z = z \quad \text{et} \quad \partial^{p+1} z = \partial(\partial^p z),$$

converge vers la fonction constante égale à $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z(\overline{k})$.

1. Vérifier l'identité $\partial z = d * z$, où $d = \frac{1}{2}(\delta_{\overline{0}} + \delta_{\overline{-1}})$.
2. Calculer les transformées de Fourier $\widehat{d}$ et $\widehat{\partial z}$.
3. Calculer $\widehat{\partial^p z}$ pour tout entier $p \geqslant 1$, puis déterminer $\lim_{p\to\infty} \widehat{\partial^p z}(\chi)$ pour tout caractère $\chi \in \widehat{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$.
4. Déduire de ce qui précède que l'on a
$$\lim_{p\to\infty} \partial^p z(\overline{j}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z(\overline{k})$$
pour tout $j \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Problème 2

Dans tout le problème, on désigne par $\mathbf{K}$ un corps fini de cardinal q. On rappelle que le groupe $\mathbf{K}^\times$ est cyclique.

Soit G le sous-ensemble de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{K})$ formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbf{K}^\times$ et $b \in \mathbf{K}$.

1. Démontrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{K})$ et déterminer son ordre.
2. Fixons $a \in \mathbf{K} \setminus \{0,1\}$. Démontrer que toutes les matrices
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbf{K}$$
sont conjuguées dans G.
3. En déduire que G possède q classes de conjugaison, que l'on décrira explicitement.
4. En observant que l'application
$$G \to \mathbf{K}^\times, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto a$$
est un morphisme de groupes, construire $q-1$ représentations linéaires distinctes de degré 1 de G.
5. En déduire le nombre de représentations irréductibles distinctes de G et, pour chacune, préciser son degré.

Soit V l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbf{K} \to \mathbf{C}$. On fait agir G sur V par la formule
$$\forall f \in V, \quad \forall x \in \mathbf{K}, \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot f\right)(x) = f\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right).$$

6. Vérifier que l'on a ainsi défini une représentation linéaire de G sur V.
7. Pour tout $t \in \mathbf{K}$, on note δ_t la fonction de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{C}$ définie par $\delta_t(x) = 0$ si $x \neq t$ et $\delta_t(t) = 1$. En examinant l'action de G sur ces fonctions, calculer le caractère χ_V de la représentation V.
8. Démontrer que le sous-espace $\mathbf{C}1$ des fonctions constantes et le sous-espace
$$V_0 = \left\{ f \in V \mid \sum_{x\in\mathbf{K}} f(x) = 0 \right\}$$
sont deux sous-représentations de V.
9. Démontrer que la représentation V_0 est irréductible.