

REPRESENTATIONS DES GROUPES FINIS

CORRECTION DE EXAMEN

Problème

I. Table des caractères de \mathfrak{S}_4

1. Les classes sont paramétrées par les décompositions en cycles : identité, 1 élément ; 2-cycle, 6 éléments ; 3-cycles, 8 éléments ; 4-cycles, 6-éléments ; produits de 2-cycles disjoints, 3 éléments.
2. Si ϕ est un tel morphisme, une transposition est envoyée vers un élément de carré 1, donc vers 1 ou -1 . Toutes les transpositions sont conjuguées et donc elles ont toutes la même valeur par ϕ . Comme elles engendrent le groupe \mathfrak{S}_4 , ϕ est soit le morphisme trivial, soit la signature.
3. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de \mathbb{C}^4 . On considère l'action linéaire de \mathfrak{S}_4 sur \mathbb{C}^4 définie par

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_4, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad \sigma \cdot e_i = e_{\sigma(i)}.$$

Soit H l'hyperplan orthogonal au vecteur $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ pour le produit hermitien standard.

- (i) Si $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$, alors, $\sigma \cdot v = x_1e_{\sigma(1)} + x_2e_{\sigma(2)} + x_3e_{\sigma(3)} + x_4e_{\sigma(4)}$. Si la somme des coordonnées de v est nulle, alors, la somme des coordonnées de $\sigma \cdot v$ est aussi nulle, puisque l'on a juste permuté les coordonnées. Doù le résultat.
 - (ii) La matrice de l'action de σ dans la base canonique est une matrice de permutation. Sur sa diagonale, il y a que des 0 et des 1 et un 1 apparaît sur la i -ème colonne que si l'élément e_i est fixé par σ . La trace est donc égal au nombre de 1 glané sur la diagonale. Comme l'orthogonal de H est la droite engendrée par $(1, 1, 1, 1)$, la représentation triviale. Pour avoir la restriction à H , il faut retirer 1 au nombre de points fixes. D'où, les valeurs identité, 3 ; 2-cycle, 1 ; 3-cycles, 0 ; 4-cycles, -1 ; produits de 2-cycles disjoints, -1 .
 - (iii) On calcule sa norme : $\frac{1}{24}(1 \cdot (3)^2 + 6 \cdot (1)^2 + 8 \cdot (0)^2 + 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2) = 1$. La représentation est donc irréductible.
4. On a bien un morphisme de groupes et donc une représentation puisque $\varepsilon(\sigma)\rho_{\text{st}}(\sigma)\varepsilon(\sigma')\rho_{\text{st}}(\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')\rho_{\text{st}}(\sigma)\rho_{\text{st}}(\sigma') = \varepsilon(\sigma\sigma')\rho_{\text{st}}(\sigma\sigma')$. O
Son caractère est donc donné par, dans l'ordre $(3, -1, 0, 1, -1)$, qui est un caractère distinct de celui de ρ_{st} . n a donc bien le non-isomorphisme annoncé.
 5. On a autant de classes d'isomorphisme de représentations irréductibles que de classes de conjugaison. On en a trouvé 4 (avec la triviale), il ne reste plus qu'à en trouver une. Elle est de dimension la racine de $24 - 1^2 - 1^2 - 3^2 - 3^2 = 4$, c'est à dire 2. Le reste se fait par orthogonalité de chaque colonne avec la première : on trouve le caractère $(2, 0, -1, 0, 2)$.

II. Le groupe Γ des rotations du cube

1. On a un sous-groupe du groupe des automorphismes affines de l'espace. La composée de deux rotations est bien une isométrie puisqu'elle est la composée de deux isométries. C'est une rotation puisque son déterminant est $1 \cdot 1 = 1$. Elle préserve bien le cube, puisque c'est la composée de deux transformations qui présevent le cube. On fait de même pour l'inverse.
2. Une grande diagonale est la distance maximale entre deux points du cube. Puisque σ préserve le cube et envoie un segment sur un segment de même longueur, on a que σ envoie une grande diagonale sur une grande diagonale.
3. On a donc une action de Γ sur les grandes diagonales et donc un morphisme de Γ vers \mathfrak{S}_4 puisqu'il y a 4 telles diagonales.
4. On voit bien que la rotation d'angle π autour de la droite passant par les milieux de $[AB]$ et $[FH]$ permute les diagonales AH et BF et fixe les deux autres. D'où l'assertion.
5. On a que σ est surjectif puisqu'on vient de voir que son image contenait toutes les transpositions, et on sait que celles-ci engendrent le groupe \mathfrak{S}_4 . Par un argument de cardinalité, il est également injectif.

III. Étude d'une représentation de Γ

1. Le nombre $\chi(\sigma)$ est égal au nombre des faces fixées par σ . On a donc dans l'ordre $(6, 0, 0, 2, 2)$. Pour le 6, c'est clair. La rotation d'angle π par rapport au milieu des arêtes échange les faces deux à deux, donc, n'en fixe aucune. Les rotations d'ordre 3, permutent deux familles de trois faces selon un 3-cycle, donc, aucune face fixe. Les rotations autour des axes reliant des centres de faces opposées fixent les deux faces opposées en question et n'en fixent aucune autre.
2. La norme du caractère est donc $\frac{1}{24}(1.(6)^2 + 6.(0)^2 + 8.(0)^2 + 6.(2)^2 + 3.(2)^2) = 3$. On obtient donc 3 caractères irréductibles non isomorphes car $1^2 + 1^2 + 1^2$ est la seule décomposition de 3 en somme de carrés.
3. On voit que $\langle(6, 0, 0, 2, 2), (1, 1, 1, 1, 1)\rangle = \frac{1}{24}(6+6.2+3.2) = 1$, $\langle(6, 0, 0, 2, 2), (3, -1, 0, 1, -1)\rangle = \frac{1}{24}(6.3 + 6.2 - 3.2) = 1$, $\langle(6, 0, 0, 2, 2), (2, 0, -1, 0, 2)\rangle = \frac{1}{24}(6.2 + 3.2.2) = 1$. Le compte est bon, puisqu'on devait en trouver trois.

III. Étude d'une représentation de Γ

1. Le caractère de la représentation duale est $\bar{\chi}$, mais comme les valeurs de χ sont réelles (et même entières), il vient que $\chi^* = \chi$. Comme deux représentations sont isomorphes si et seulement si elles ont même caractère, il vient que V et V^* sont isomorphes.
2. On a $\tau.f(F') = f(\tau^{-1}(F')) = f(F)$.
3. Si deux faces F et F' sont distinctes, il existe une transposition σ qui les permute. Comme $\sigma.f = f$, alors f doit prendre la même valeur pour F et pour F' , d'après la question qui précède. Comme on a pris F et F' quelconques, on a notre assertion. Pour la dernière question, on a clairement que la fonction constante est paire.
4. Soit g dans Γ . Comme g permute les faces du cube, g permute la base canonique duale, qui est unitaire pour la forme hermitienne canonique de V^* . Donc, g envoie une base unitaire sur une base unitaire. Il en résulte que l'orthogonal de $(V^*)^\Gamma$ est encore une sous-représentation, et donc, que la projection orthogonale de V^* sur $(V^*)^\Gamma$ est bien la projection cherchée. Les formules de projection montrent qu'elle envoie $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ sur $(\mu, \mu, \mu, \mu, \mu, \mu)$ où μ désigne la moyenne des x_i .
5. Soit f dans V_+^* , alors f prend les mêmes valeurs sur des faces opposées. Pour tout σ dans Γ , $\sigma.f$ prend aussi les mêmes valeurs sur des faces opposées, puisque σ^{-1} transforme deux faces opposées en deux faces opposées. Donc, $\sigma.f \in V_+^*$. L'assertion pour V_-^* est identique. Comme V^Γ est inclus dans V_+^* , il ya au moins deux sous-représentations dans V_+^* . Comme il y en a trois irréductibles en tout, il vient que V_+^* possède exactement deux sous-représentations irréductibles et V_-^* une seule (elle-même).

IV. Joue avec les dés !

1. Soit F une face et F_1, F_2, F_3, F_4 ses quatre faces adjacentes. Alors, pour σ de Γ , $\sigma(F_1), \sigma(F_2), \sigma(F_3), \sigma(F_4)$ sont les quatre faces adjacentes de $\sigma(F)$. D'où la commutation.
2. Il vient que u envoie une représentation irréductible W_i sur une sous-représentation, puisque u est un morphisme de représentations. Comme elles sont toutes les trois irréductibles, donc indécomposables, elles sont envoyées sur des sous-représentations indécomposables, donc irréductibles ou nulles. Comme elles sont toutes les trois deux à deux non isomorphes, elles sont envoyées sur elles-mêmes (ou sur la représentation nulle). Si on est dans le cas nul, on a bien une homothétie de rapport nul. Sinon, u envoie la représentation W_i sur W_i , donc, par le lemme de Schur (on est sur \mathbb{C}), on sait que l'on a bien une homothétie.
3. Comme les représentations W_i sont toutes les trois deux à deux non isomorphes, elles sont envoyées sur elles-mêmes (ou sur la représentation nulle). Si on est dans le cas nul, on a bien une homothétie de rapport nul. Sinon, u envoie la représentation W_i sur W_i , donc, par le lemme de Schur (on est sur \mathbb{C}), on sait que l'on a bien une homothétie.
4. Comme on sait que l'on a une homothétie sur chaque sous-représentations irréductibles, il suffit de regarder sur un de chaque specimen.
 Pour V^Γ , on prend $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ qui a pour image par u lui-même. Donc, le rapport est 1.
 Pour V_-^* , on prend $(1, 0, 0, 0, 0, -1)$ (on dira par exemple que la première et dernière coordonnée correspondent à des faces opposées) qui a pour image par u , $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Le rapport est donc nul.
 Pour V_+^* , c'est un peu plus difficile, il faut choisir une fonction paire de l'hyperplan orthogonal à $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$, donc par exemple $(1, -1/2, -1/2, -1/2, -1/2, 1)$ qui a pour image par u , $(-1/2, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4, -1/2)$. Le rapport est donc $-1/2$.

Autre méthode : on peut remarquer que la matrice de u dans la base canonique duale n'a que des 0 sur la diagonale (puisque l'on ne considère dans la transformation que des faces adjacentes). Elle est de trace nulle. Mais si λ est la dernière valeur cherchée, on obtient dans une base compatible avec la décomposition en irréductible (et donc où la matrice est diagonale) $1 + \lambda + \lambda + 0 + 0 + 0 = 0$ et donc $\lambda = -1/2$. La trace, c'est la classe !

5. On a $u = \pi_1 - 1/2\pi_2 + 0\pi_3$, où les π_i sont les trois projections sur les composantes irréductibles. Donc, $u^n = \pi_1 + (-1/2)^n\pi_2$, qui tend vers π_1 .
6. On voit par IV.4 que $\pi_1(f)$ est la fonction constante égale à la moyenne de 1 2 3 4 5 6, donc $7/2$.

Notons qu'on peut également calculer u^n pour tout n : c'est donné par la formule précédente $u^n = \pi_1 + (-1/2)^n\pi_2$. On connaît π_1 , et aussi $\pi_1 + \pi_2$ qui est la projection envoyant f sur sa partie paire : $f_+ := \frac{f+f\sigma}{2}$. Donc, $u^n = (1 - (-1/2)^n)\pi_1 + (-1/2)^n f_+$. On fait finalement ce que l'on pourrait appeler de l'analyse harmonique sur le cube. Les « harmoniques » sont les représentations irréductibles, et le « spectre » est l'ensemble des valeurs propres, ou si on préfère les rapports d'homothétie.