MASTER M1 Recherche

Groupes Classiques et Géométrie

Correction du PARTIEL du 18 Avril 2014

Exercice 1

1. Soit donc u non nul dans $\mathcal{C}$. Montrer qu'il existe un vecteur v tel que $\varphi(u,v) \neq 0$. En déduire que (u,v) est la base d'un plan P tel que la matrice de la restriction de q à P dans cette base est de la forme
$$M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix},$$
avec $a, b \in \mathbb{K}$, a non nul.

   Si v n'existait pas, u serait dans le noyau de q. Impossible car q est non dégénérée et u non nul. La matrice est obtenue en posant $a = \varphi(u,v)$, $b = q(v)$.

2. On résout l'équation en x et y donnée par la relation $\varphi(xu + yv) = 1$. En imposant $y = 1$ on obtient $x = \frac{1-b}{2a}$. On résoud l'équation en x et y donné par la relation $\varphi(xu+yv) = -1$. En imposant $y = 1$ on obtient $x = -\frac{1+b}{2a}$. Les deux vecteurs $xu + yv$ ainsi obtenus sont q-orthogonaux, comme on peut le voir avec un rapide calcul.

   Appelons les w et w'. On obtient que $u' = w + w'$ et $u'' = w - w'$ sont deux vecteurs indépendants et isotropes.

3. Pour $\mathbb{C}$ c'est clair car tout complexe est un carré. Pour $\mathbb{R}$, on fait deux cas selon si le réel est positif ou négatif. Pour $\mathbb{F}_q$, c'est plus délicat. On veut $\lambda = x^2 - y^2$ c'est à dire $x^2 = y^2 + \lambda$. Or, il y a $(q+1)/2$ carrés et donc $(q+1)/2$ éléments de la forme x^2 et le même nombre pour les éléments de la forme $y^2 + \lambda$. Comme $(q+1)/2 + (q+1)/2 > q$, on a forcément un élement à l'intersection qui convient.

4. Si λ non nul, deux vecteurs u_1 et u_2 sur la nappe sont non nuls. Il existe une isométrie entre les droites $\mathbb{K}u_1$ et $\mathbb{K}u_2$ qui envoie u_1 sur u_2. Cette isométrie se prolonge en une isométrie de E par le théorème de Witt, donc en un élément de $\mathrm{O}(q)$ qui envoie u_1 sur u_2.

5. Soit u_1 un vecteur de E. Montrons qu'il se décompose en vecteurs isotropes. S'il est lui-même isotrope, c'est clair. Sinon, il est dans une nappe N_λ , avec λ non nul. Soit $\lambda = x^2 - y^2$ la décomposition obtenue précédemment. Posons $u_2 = xw + yw'$ dans le plan P. On a donc $q(u_2) = \lambda$ et donc il existe o dans $\mathrm{O}(q)$ qui envoie u_1 sur u_2. Or, u_2 se décompose sur u' et u'', donc u_1 se décompose également sur $o^{-1}(u')$ et $o^{-1}(u'')$, qui sont isotropes.

Exercice 2

1. Si φ n'est pas inversible, elle possède un noyau. On considère un m-parallélepipède (de m-volume V non nul) dont une arête est dans le noyau. Son image est un parallélotope de dimension strictement inférieure, donc de m-volume nul. Contradiction.

2. Comme o est orthogonal, il conserve tous les volumes. Comme $s = o^{-1}\sigma$, il conserve les m-volumes.

3. Il suffit de prendre le m-parallélépipède donné par les vecteurs propres (orthogonaux) v_{i_j} correspondant aux valeurs propres λ_{i_j}. La conservation du m-volume donne directement la formule désirée.

4. Pour tout j, j' de 1 à n, choisissons une partie I à $m-1$ éléments ne contenant ni j ni j', ce qui est possible car $m < n$. La question précédente donne $\lambda_{i_j} \prod_{i \in I} \lambda_i = 1$, et $\lambda_{i_{j'}} \prod_{i \in I} \lambda_i = 1$, d'où $\lambda_j = \lambda_{j'}$. Ainsi, tous les λ_i sont égaux. Comme s est diagonalisable, s est une homothétie, et comme elle respecte les m-volumes, c'est l'identité (rappelons que les valeurs propres sont strictement positives).

   Donc, $\varphi = o$ et donc φ est bien une isométrie.

Problème

A. Préliminaires

1. Un élément de G_0 s'écrit donc à la fois sous la forme $a_1e_1+\cdots+a_{p-1}e_{p-1}+a_pe_p$ et sous la forme sous la forme $b_{p+1-k}e_{p+1-k}+\cdots+b_{p+p'-k}e_{p+p'-k}$. En égalisant les deux expressions et en disant que la famille $\underline{e}$ est libre, on arrive au fait que G_0 est inclus dans le sous-espace engendré par $(e_{p+1-k},\cdots,e_p)$. L'inclusion inverse est claire.

2. Comme la partie $(e_{p+1-k},\cdots,e_p)$ est libre, c'est une base de G_0: la dimension de G_0 est $p-(p+1-k)+1=k$.

3. Un élément de $F^a\cap F'_0$ s'écrit à la fois sous la forme $a_1e_1+\cdots+a_{p-1}e_{p-1}+a_p(e_p+ae_{p+p'-k+1})$ et sous la forme sous la forme $b_{p+1-k}e_{p+1-k}+\cdots+b_{p+p'-k}e_{p+p'-k}$. En égalisant les deux expressions et en disant que a est non nul, on arrive au fait que a_p est nul et donc que $F^a\cap F'_0$ est inclus dans le sous-espace engendré par $(e_{p+1-k},\cdots,e_{p-1})$. L'inclusion inverse est claire et le calcul de dimension aussi.

B. Action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur la grassmannienne Gr_p.

1. C'est une question de cours. C'est essentiellement le théorème de la base incomplète et le fait qu'il existe un élément (unique, mais on s'en fiche) qui envoie une base donnée sur une autre base donnée.

2. Pareil, voir le cours.

3. On construit la topologie par transport de structure à partir de la topologie quotient de $\mathrm{GL}(E)$ par le stabilisateur. Le fait que O_n agit transitivement sur la grassmannienne (grâce au théorème de la base orthonormée incomplète), fait que la grassmannienne est l'image d'un compact par une application continue, donc compacte.

4. I_n+M_a est dans $\mathrm{GL}(E)$ (car elle est triangulaire avec des 1 sur la diagonale). Elle envoie la base $(e_1,\cdots,e_{p-1},e_p)$ de F_0 sur la base $(e_1,\cdots,e_{p-1},e_p+ae_{p+p'-k+1})$ de F^a. Donc, elle envoie bien F_0 sur F_a. Comme pour la topologie des matrices (disons la topologie du sup) I_n+M_a tend vers I_n quand a tend vers 0, il vient par continuité de l'application $g\mapsto g.F_0$ que $F_0=\mathrm{I}_nF_0$ est dans l'adhérence de $F^a=(\mathrm{I}_n+M_a).F_0$.

C. Action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Gr}_p\times\mathrm{Gr}_{p'}$ et continuité de l'intersection.

1. L'inclusion $g(F\cap F')\subset g(F)\cap g(F')$ est claire et ne demande par que g soit inversible. Montrons l'inclusion inverse. Si b est dans $g(F)\cap g(F')$, alors, il existe $a\in F$ et $a'\in F'$ tels que $g(a)=b$, et $g(a')=b$. Comme g est inversible (en fait injective), on a que $a=a'\in F\cap F'$.

2. Cela résulte directement de la question précédente, puisque si $\dim F\cap F'=k$, on a $\dim g(F)\cap g(F')=\dim g(F\cap F')=\dim F\cap F'=k$.

3. On part d'une base de $F\cap F'$ et on la complète d'une part en une base de F et d'autre part en une base de F'. On obtient donc une base de $F+F'$ que l'on complète en une base de E. Il existe donc un g de $\mathrm{GL}(E)$ qui envoie cette base sur $\underline{e}$. Alors, g envoie bien F sur F_0 et F' sur F'_0.

4. On a vu que l'action respecte les $\mathcal{O}_k$, puis qu'elle était transitive sur ceux-ci. Maintenant, si (F,F') est dans Gr_p, $F'\in\mathrm{Gr}_{p'}$, l'intersection $F\cap F'$ est de dimension $p+p'-\dim F+F'$ par la formule de Grassmann. Donc, est contenue entre $p+p'-n$ et $p+p'-p'=p$. On a obtenu ainsi toutes les orbites.

D. Continuité de l'intersection et adhérence des orbites.

1. C'est le produit de deux actions continues: celle de $\mathrm{GL}(E)$ sur Gr_p et celle de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathrm{Gr}_{p'}$.

2. Soit $\varphi : \mathrm{GL}(E) \to \mathcal{O}_k$, donnée par $g \mapsto g.(F_0, F_0')$, elle est donc continue par ce qui précède. Par passage au quotient, on obtient une application continue $\bar{\varphi} : \mathrm{GL}(E)/\mathrm{Stab}_{(\mathrm{F_0,F_0'})} \to \mathcal{O}_k$. $\iota \circ \bar{\varphi}$ est l'application qui envoie la classe $\bar{g}$ de g sur $g(F_0) \cap g(F_0') = g(F_0 \cap F_0')$. On reconnait l'action transitive de $\mathrm{GL}(E)$ sur Gr_k et celle-ci est continue par construction. Donc, $\iota \circ \bar{\varphi}$ est continue et comme $\bar{\varphi}$ est un homéomorphisme par le théorème d'homéomorphisme, on a que ι est continue.

3. Comme F_0 qui est dans $\mathcal{O}_k$ est dans l'adhérence de $\{F^a, a \neq 0\}$, qui est dans $\mathcal{O}_{k-1}$. on a par continuité de l'action que toute l'orbite $\mathcal{O}_k$ est dans l'adhérence de $\mathcal{O}_{k-1}$.

4. On a donc $\mathcal{O}_{k+1} \subset \overline{\mathcal{O}}_k$, $\mathcal{O}_{k+2} \subset \overline{\mathcal{O}}_{k+1}$, et donc $\mathcal{O}_{k+2} \subset \overline{\mathcal{O}}_k$. Ainsi de suite par récurrence, on obtient l'inclusion désirée.

5. Cela provient de la caractérisation du rang $\leq k'$ par l'annulation des mineurs de taille $k'+1$ (les mineurs étant des applications continues sur $\mathcal{M}_{n,p+p'}(\mathbb{R})$).

6. La matrice $M_{(g,g')}$ a donc pour rang la dimension de $g(F) + g(F') = p + p' - \dim g(F) \cap g(F') = p + p' - \dim F \cap F'$. Donc, l'ensemble des couples (g, g') de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que $\dim \big(g(F_0) \cap g'(F_0')\big) \geq k$ est l'image réciproque par l'application $(g, g') \mapsto M_{(g,g')}$, de l'ensemble des matrices de rang inférieur à $k' = p + p' - k$. Or, cette application est continue (par coordonnées, on n'utilise que des polynômes), donc, on prend bien l'image réciproque d'un fermé par une application continue. On obtient alors un fermé.

7. L'action du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Gr}_p \times \mathrm{Gr}_{p'}$ est transitive, puisqu'elle est le produit de deux actions transitives. De plus, cette action est continue. Par le théorème d'homéomorphisme $(g, g') \mapsto (g(F_0), g'(F_0'))$ envoie un fermé sur un fermé. Or, ce fermé est, par construction, $\bigcup_{k \leq j \leq p} \mathcal{O}_j$. Donc, comme $\mathcal{O}_k \subset \bigcup_{k \leq j \leq p} \mathcal{O}_j$, il vient $\overline{\mathcal{O}}_k \subset \bigcup_{k \leq j \leq p} \mathcal{O}_j$.