Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1-G

Algèbre

PARTIEL

25 Novembre 2013

Durée : 2h30

Stay calm, do as you've been taught, and nobody gets hurt.

Problème.

Le but du problème est d'examiner des conditions suffisantes pour qu'un p-Sylow possède un supplémentaire dans un groupe fini. On introduira pour cela la fonction de transfert de Burnside.

On fixera dans tout le problème un groupe fini G et un nombre premier p divisant l'ordre de G. On rappelle que le normalisateur d'un sous-groupe H de G est par définition le sous-groupe

$$N_G(H) = \{n \in G, nHn^{-1} = H\}$$

A. Préliminaires.

Soit H un p-Sylow de G et x, y deux éléments du centre de H.

1. Soit $Z_G(y)$ l'ensemble des éléments de G qui commutent à y. Montrer que $Z_G(y)$ est un sous-groupe de G et que H est un p-Sylow de $Z_G(y)$.
2. On suppose qu'il existe un élément de G, noté g, tel que $gxg^{-1} = y$. Montrer que gHg^{-1} est un p-Sylow de $Z_G(y)$.
3. En déduire qu'il existe a dans $Z_G(y)$ tel que $aHa^{-1} = gHg^{-1}$.
4. Trouver alors un élément n de $N_G(H)$ vérifiant $nxn^{-1} = y$.

B. Un contre-exemple.

Dans cette partie, on suppose que G est le groupe $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$ des matrices inversibles à coefficients dans $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1. Montrer que le sous-groupe H des matrices triangulaires supérieures unipotentes, i.e. avec que des 1 sur la diagonale, est un p-Sylow de G (on ne demande pas de montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe).
2. Montrer que $N_G(H)$ est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de G.
3. Soit $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans H. Trouver une matrice g de G telle que $gxg^{-1} = y$.
4. Montrer qu'il n'existe pas de n dans $N_G(H)$ tel que $nxn^{-1} = y$.
5. En observant ce contre-exemple, pouvez-vous dire quelles propriétés sont absolument nécessaires pour que la propriété montrée en **A** 4 soit vérifiée ?

C. Morphisme de transfert de Burnside.

On suppose que H est un sous-groupe d'indice n de G. On fixe une famille de représentants $\{x_1, \cdots, x_n\}$ dans G des classes de G/H, de sorte que $G/H = \{\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n\}$, $\overline{x}_i = x_i H$. On fait agir G par translation à gauche sur G/H.

1. Montrer qu'il existe un morphisme $s \mapsto \sigma_s$ du groupe G dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ tel que $s.\overline{x}_i = \overline{x}_{\sigma_s(i)}$. *On ne demande ici qu'une petite justification claire et concise.*
2. Montrer qu'on a alors $x_{\sigma_s(i)}^{-1} s x_i \in H$. On notera dans la suite $h_{s,i} := x_{\sigma_s(i)}^{-1} s x_i \in H$.
3. On suppose dorénavant H *abélien.* On note Ver l'application de G dans H définie par $\mathrm{Ver}(s) = \prod_{i=1}^n h_{s,i}$. Montrer que $\mathrm{Ver}(s)$ ne dépend pas du choix des représentants x_i.
   On pourra dans un premier temps noter $x'_i = x_i h_i$, avec h_i dans H, un autre choix de représentant, et calculer ${x'_{\sigma_s(i)}}^{-1} s x'_i$.
4. Montrer que Ver est un morphisme de groupes.
   On pourra d'abord remarquer que $h_{ss',i} := x_{\sigma_{ss'}(i)}^{-1} s x_{\sigma_{s'}(i)} x_{\sigma_{s'}(i)}^{-1} s' x_i$.

D. Action d'un sous-groupe cyclique de G.

On fixe dans cette partie un élément s de G et on considère le sous-groupe cyclique C_s engendré par s. Le sous-groupe C_s agit encore par translation à gauche sur les classes de G/H. Si l est le nombre d'orbites pour cette action, on note $O_k \subset G/H$, $1 \leq k \leq l$, les orbites, de cardinal d_k, pour l'action de C_s. Pour tout k, on note $g_k \in G$ un représentant dans G de O_k, de sorte que $O_k = \{\overline{g}_k, s.\overline{g}_k, \cdots, s^{d_k - 1}.\overline{g}_k\}$.

1. Supposons que le groupe cyclique C_s agit transitivement sur un ensemble X. Montrer que le cardinal de X divise l'ordre de C_s et que le noyau de l'action est engendré par $s^{|X|}$.
2. Montrer que $(g_1, sg_1, \cdots, s^{d_1-1}g_1, \cdots, g_k, sg_k, \cdots, s^{d_k-1}g_k \cdots, g_l, sg_l, \cdots, s^{d_l-1}g_l)$ est un système de représentants de toutes les classes de G/H. On notera $(x_1, \cdots, x_n)$ ce système (ordonné).
3. En utilisant les résultats et les notations de **C**1 et **C**2, montrer que $h_{s,i} = 1$ si $x_i = s^j g_k$, pour $1 \leq k \leq l$ et $1 \leq j < d_k - 1$.
4. Montrer que pour tout k, $g_k^{-1} s^{d_k} g_k \in H$.
5. En déduire que $\mathrm{Ver}(s) = \prod_{k=1}^l g_k^{-1} s^{d_k} g_k$.

E. Applications.

On suppose que H est un p-Sylow abélien de G. On fixe s dans H.

1. On suppose ici que H est inclus dans le centre de $N_G(H)$.
   (a) Montrer en utilisant **A** que $g_k^{-1} s^{d_k} g_k = s^{d_k}$.
   (b) Montrer alors l'égalité $\mathrm{Ver}(s) = s^n$.
   (c) Montrer que n est premier avec p et en déduire que Ver induit par restriction un automorphisme de H.
   (d) Déduire que G est isomorphe à un produit semi-direct de la forme $Q \rtimes H$, où Q est un sous-groupe distingué de G.
2. On suppose ici que le p-Sylow H est cyclique d'ordre p^m.
   (a) Quel est l'ordre du groupe des automorphismes de H ?
   (b) Montrer que $N_G(H)$ agit par conjugaison sur H et que cette action fournit un morphisme de $N_G(H)/Z_G(H)$ dans $\mathrm{Aut}(H)$, où $Z_G(H)$ est le sous-groupe des éléments qui commutent à H.

(c) Déduire de ce qui précède que l'ordre de $N_G(H)/Z_G(H)$ est premier avec p et plus petit que p.

(d) Supposons de plus que p est le plus petit nombre premier qui divise l'ordre de G. Déduire encore une fois que G est isomorphe à un produit semi-direct de la forme $Q \rtimes H$, où Q est un sous-groupe distingué de G.

Exercice.

Soit $n \geq 2$. On note G_n le groupe de présentation :

$$\Big\langle x_i,\, 1 \leq i \leq n-1 \,:\, \forall\, i,\, x_i^2 = 1,$$

$$\forall\, i \neq j,\, x_i x_j x_i = x_j x_i x_j,$$

$$\forall\, \underbrace{i, j, k}_{2\,\text{à}\,2\,\neq},\, (x_i x_j x_i x_k)^2 = 1\Big\rangle$$

1. Montrer qu'il existe un morphisme surjectif $G_n \to \mathfrak{S}_n$, $x_i \mapsto (1i{+}1)$ pour tout $1 \leq i \leq n{-}1$.
2. On pose $H := \langle x_1, ..., x_{n-2}\rangle$, vérifier que $G_n = H \cup x_{n-1}H \cup x_1 x_{n-1} H \cup \cdots \cup x_{n-2}x_{n-1}H$.
3. Montrer, par récurrence, sur $n \geq 2$ que $G_n \simeq \mathfrak{S}_n$.