BASE DES POLYNOMES DE HILBERT

Voici un exemple d'utilité des bases en dimension finie, qui peut constituer une alternative à l'exemple classique des bases utilisées pour calculer la suite de Fibonacci. Il s'agit de la base des polynômes de Hilbert.
PROBLEME : Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Calculer $S := P(0) + P(1) + \ldots + P(n)$.

Pour cela, supposons que l'on ait trouvé un polynôme Q tel que

$$\boxed{Q(X+1) - Q(X) = P(X),\ Q(0) = 0.}$$

Alors, le problème sera résolu, puisque

$$S = P(0)+P(1)+\ldots+P(n) = Q(1)-Q(0)+Q(2)-Q(1)+\ldots+Q(n+1)-Q(n) = Q(n+1),$$

par simplifications en cascades.

Remarque : Le problème s'apparente à l'intégration de P. On dit que P est la dérivée *discrète* de Q et donc que Q est une primitive discrète de P. On notera dans la suite D la dérivée discrète : $DQ(X) = Q(X+1) - Q(X)$.
On note maintenant H_n le n-ième polynôme de Hilbert :

$$\boxed{H_k := \frac{1}{k!}X(X-1)\ldots(X-k+1).}$$

Alors, il est clair que H_k est un polynôme de degré k et $DH_{k+1} = H_k$.
Effectivement :

$$DH_{k+1}(X) = H_{k+1}(X+1)-H_{k+1}(X) = \frac{1}{(k+1)!}(X+1)(X)\ldots(X-k+1)-\frac{1}{(k+1)!}(X)(X-1)\ldots(X-k)$$

$$= \frac{1}{(k+1)!}X(X-1)\ldots(X-k+1)[X+1-X+k)] = H_k(X).$$

Donc (H_k) est une base de l'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{R}[X]$ et de plus, si on décompose P dans la base des H_k,

$$P = \alpha_0 H_0 + \alpha_1 H_1 + \ldots + \alpha_m H_m,$$

et si on pose

$$Q = \alpha_0 H_1 + \alpha_1 H_2 + \ldots + \alpha_m H_{m+1},$$

Il vient par linéarité de D :

$$DQ = \alpha_0 DH_1 + \alpha_1 DH_2 + \ldots + \alpha_m DH_{m+1} = \alpha_0 H_0 + \alpha_1 H_1 + \ldots + \alpha_m H_m = P.$$

Ce qui fournit la solution à notre problème : $S = Q(n+1)$.