Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1G

Algèbre

Fiche TD 7

Préliminaires

Exercice 1 Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation d'un groupe G et soit W une sous-représentation de V. On fixe une base $(e_1, \ldots, e_m)$ de W que l'on complète en une base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ de V.

1. Montrer (ou plutôt remarquer) que la matrice de $\rho(g)$ dans la base $\mathbf{e}$ est triangulaire par blocs pour tout g de G. On notera donc
$$\rho(g) = \begin{pmatrix} A(g) & X(g) \\ 0 & B(g) \end{pmatrix}.$$
2. Soit $\sigma : G \to \mathrm{GL}(V/W)$ la représentation-quotient et posons $\overline{v}$ l'image d'un vecteur v de V dans V/W. Montrer (ou plutôt remarquer) que la matrice de $\sigma(g)$ dans la base $(\overline{e_{m+1}}, \ldots, \overline{e_n})$ est $B(g)$.

Exercice 2 Montrer que le sous-espace des invariants d'une somme directe est la somme directe des sous-espaces des invariants : si V et W sont deux représentations, on a ainsi $(V \oplus W)^G = V^G \oplus W^G$.

Lemme de Schur

Exercice 3 [Réciproque du lemme de Schur]

Soient G un groupe fini et V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation. On suppose que l'algèbre D des endomorphismes de V est une algèbre à division, *i.e.* un corps, commutatif ou non. Montrer que V est irréductible.
Si V est réductible, utiliser la semi-simplicité et exhiber un élément de D non nul et non inversible avec des matrices par blocs.

Théorie des caractères

Exercice 4 Montrer que si l'on a $\langle \chi, \chi \rangle = 2$ (resp. $\langle \chi, \chi \rangle = 3$), alors une représentation associée à χ se décompose en somme directe de deux (resp. trois) représentations irréductibles distinctes. Que peut-il se passer si $\langle \chi, \chi \rangle = 4$?
Si $\langle \chi, \chi \rangle = 4$, la représentation se décompose soit en somme de quatre représentations irréductibles distinctes, soit une seule avec multiplicité 2.

Exercice 5 Soit G un groupe fini et soit $Z(G)$ son centre. On considère une représentation irréductible $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ de degré $\dim_{\mathbb{C}}(V) = d$. On se propose de démontrer la formule

$$\frac{1}{|Z(G)|} \sum_{z \in Z(G)} |\chi_\rho(z)|^2 = d^2,$$

où χ_ρ désigne le caractère de ρ.

1. Montrer que, pour tout z de $Z(G)$, $\rho(z)$ est une homothétie de rapport $\lambda(z)$ non nul, et que $\lambda : Z(G) \to \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupes.

   C'est le lemme de Schur. Le fait d'avoir un morphisme de groupes provient du fait que ρ est un morphisme.

2. En déduire que V, vu comme représentation de $Z(G)$, est isomorphe à $d\mathbb{C}_\lambda$, c'est-à-dire la somme directe de d copies de $\mathbb{C}_\lambda$, où $\mathbb{C}_\lambda$ est la représentation de degré 1 de $Z(G)$ correspondant au morphisme λ.

3. Conclure.

   Prendre la norme $Z(G)$-invariante de la représentation V restreinte au centre $Z(G)$.

Exercice 6 [Représentation par permutation]

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. On considère l'espace $\mathbb{C}X$ engendré par une base $(e_x)_{x\in X}$, et la représentation par permutation ρ donnée par

$$\rho(g)(e_x) = e_{g\cdot x}.$$

1. Montrer que l'on définit bien ainsi une représentation.

2. Montrer que son caractère χ_ρ est donné par

   $$\chi_\rho(g) = |X^g|,$$

   où X^g désigne l'ensemble des éléments de X invariants par g.

3. Montrer que le sous-espace $\mathbb{C}X^G$ de $\mathbb{C}X$ constitué des éléments G-invariants de $\mathbb{C}X$, est de dimension égale au nombre d'orbites de X sous G.

4. En déduire la formule de Burnside :

   $$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |X^g|.$$

5. On considère une représentation supplémentaire à la sous-représentation $\mathbb{C}\sum_{x\in X} e_x$. Montrer que son caractère χ est donné par $\chi(g) = |X^g| - 1$.

6. On suppose que G agit transitivement sur X. Montrer que G agit de façon doublement transitive si et seulement si χ est irréductible.

Exercice 7 [Exemples de représentations par permutation]

Décrire le caractère χ de la représentation par permutation de l'exercice précédent dans les cadres suivants :

1. $\mathfrak{S}_n$ agissant naturellement sur $X := \{1, \cdots, n\}$,
2. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ agissant sur les sommets d'un triangle équilatéral,
3. D_3 agissant sur les sommets d'un triangle équilatéral,
4. D_4 agissant sur les sommets d'un carré,
5. $\mathfrak{S}_4$ agissant sur d'un tétraèdre.

Exercice 8 [Probabilités et représentations]

1. Quel est en moyenne le nombre d'éléments fixés par une permutation ?
   Eh bien, $n!^{-1}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}|X^\sigma| = 1$*, bien sûr, par la formule de Burnside... puisque l'action de* $\mathfrak{S}_n$ *sur* $X = \{1, \ldots, n\}$ *est transitive.*
2. Quelle est la variance du nombre d'éléments fixés par une permutation ?
   Facile : $n!^{-1}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}|X^\sigma|^2 - \left(n!^{-1}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}|X^\sigma|\right)^2 = 2 - 1^2 = 1$*, encore par la formule de Burnside... puisque l'action de* $\mathfrak{S}_n$ *sur* X *est doublement transitive.*

Exercice 9 [La table de caractère vue comme une matrice carrée] Soit $U = (u_{ij})_{1\le i,j\le h}$ la table de caractères de G, et soit D la matrice diagonale des cardinaux des classes de conjugaison de G :

$$D = \mathrm{diag}\big(|C_j|\big)_{1\le j\le h}.$$

Montrer que l'on a :

(i) $UDU^* = |G|\mathrm{I}_h$;

(ii) $U^*U = |G|D^{-1}$;

(iii) étant donnés deux éléments g et g' de G,

$$\sum_i \overline{\chi_i(g)}\chi_i(g') = \begin{cases} \frac{|G|}{|C_j|} & \text{si } g, g' \in C_j, \\ 0 & \text{si } g \text{ et } g' \text{ non conjugués.} \end{cases}$$

Exercice 10 Comment compléter la table des caractères d'un groupe lorsqu'il ne manque qu'une représentation irréductible ?

Deux méthodes faciles à mettre en œuvre :

- *on commence par trouver la dimension de la représentation par la formule de la somme des carrés, puis, la dernière ligne de la matrice* U *se trouve via de petites équations à une inconnue ! On utilise pour cela l'exercice précédent.*
- *on utilise la représentation régulière :*

$$|G|\,\delta_{e,g} = \chi_{\mathrm{reg}}(g) = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}\chi(e)\chi(g).$$

  Cela donne la même formule.
- *Si* ρ *est une représentation irréductible, alors* $\overline{\rho}(g) := \overline{\rho(g)}$ *définit également une représentation irréductible (parfois la même).*
- *Si* ϵ *est une représentation de degré* 1 *et* ρ *une représentation irréductible, alors,* $\epsilon\rho(g) := \epsilon(g)\rho(g)$ *définit également une représentation irréductible.*

- *On peut trouver facilement toutes les représentations (irréductibles, mais cela va de soi) de degré* 1 *d'un groupe* G *: ce sont les représentations irréductibles de* $G/D(G)$.

Exercice 11 [Classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_n$]

Exercice 12 Dresser la table de caractères des groupes $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$, D_4, $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_5$.

1. $\mathfrak{S}_4$: On peut multiplier une représentation irréductible par une représentation de degré 1. On peut appliquer la méthode l'orthogonalité des colonnes pour la dernière ligne.
2. D_4 agit sur le carré. On peut le voir de deux manières : soit comme un sous-groupe du groupe orthogonal $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, soit comme un sous-groupe du groupe de permutation des quatre sommets du carré. A partir de là, on peut trouver des représentations de degré 1.
3. $\mathfrak{A}_4$ possède un sous-groupe distingué V_4 et le quotient est $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Donc, toute représentation de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est automatiquement une représentation de $\mathfrak{A}_4$ (pourquoi ?).
4. $\mathfrak{A}_5$ agit sur ses six 5-Sylow, et cela fournit une représentation de degré $6 - 1 = 5$. On obtient alors un morphisme de $\mathfrak{A}_5$ dans $\mathfrak{A}_6$ et il est facile de voir (en considérant l'ordre) par exemple qu'un 5-cycle a pour image un 5-cycle. En revanche, un 3-cycle a pour image, soit un 3-cycle, soit un double 3-cycle. On suppose par l'absurde qu'il s'agit d'un 3-cycle et on voit que le caractère possède une composante triviale, ce qui est en contradication avec le fait qu'un groupe agit de façon transitive sur ses sous-groupes de Sylow.

   Pour finir, on trouve en même temps les deux dernières lignes, mais là se cache encore une difficulté. On suppose que le caractère est non réel et dans ce cas on en déduit un autre caractère (le conjugué) et on aboutit à une contradiction. Donc, le caractère est bien réel et les équations sont simples à résoudre.