Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1G

Algèbre

Fiche TD 9

Action sur l'ensemble des caractères irréductibles

Exercice 1 [Tensorisation par une représentation de degré 1]

Soient G un groupe fini et V un espace vectoriel et soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation. Soit ε un morphisme de G dans $\mathbb{C}^*$, c'est-à-dire une représentation de degré 1 de G. On considère le morphisme $\rho_\varepsilon : G \to \mathrm{End}(V)$, $g \mapsto \epsilon(g)\rho(g)$.

1. Montrer que si ρ est une représentation irréductible, alors ρ_ϵ est encore une représentation irréductible de G.

   D'abord, ρ_ε est encore un morphisme. Pour l'irréductibilité, on peut par exemple vérifier que son caractère est de norme 1.

2. En déduire une action, dite *action de tensorisation*, de $\mathrm{Mor}(G, \mathbb{C}^*)$ sur $\mathrm{Irr}(G)$.
3. Exemple : on considère la représentation standard ρ de $\mathfrak{S}_3$ (de degré 2) et sa représentation alternée ε. Montrer que ρ_ε est isomorphe à ρ.
4. Décrire les orbites de cette action lorsque G est l'un des groupes suivants : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $\mathfrak{A}_4$ ou $\mathfrak{S}_4$.

Utilisation de la table des caractères

Exercice 2 On veut montrer que l'on peut retrouver le treillis (pour l'inclusion) des sous-groupes distingués de G à partir de la table des caractères de G.

1. Montrer, pour tout caractère irréductible χ, que $K_\chi = \{g, \chi(g) = \chi(e)\}$ est le noyau de la représentation correspondante.

   On a $\chi(g) = \mathrm{tr}\big(\rho(g)\big)$, où $\rho(g)$ a pour valeurs propres des racines de l'unité. Le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire assure que la somme est égale au degré de la représentation si et seulement si toutes ces valeurs propres valent 1.

2. Si K est un sous-groupe distingué de G, montrer que K est le noyau de la représentation régulière du groupe G/K (vue comme G-représentation par passage au quotient). En déduire que K est l'intersection de noyaux de G-modules irréductibles.

   La régulière est fidèle, ce qui implique le premier résultat. Grâce au théorème de semi-simplicité des représentations, on voit que tout noyau de représentation est intersection de noyaux de représentations irréductibles.

3. Déduire que le treillis engendré par les K_i ($i \in \mathrm{Irr}(G)$) est égal au treillis des sous-groupes distingués de G.

4. Observer ce résultat sur la table de $\mathfrak{S}_3$ et celle de $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 3 Soit G un groupe fini. Montrer que l'intersection des noyaux des représentations de degré 1 de G est égale au groupe dérivé $D(G)$.
L'inclusion inverse est claire puisque le quotient de G par le noyau d'une représentation de degré 1 s'injecte dans le groupe abélien $\mathbb{C}^*$. Pour montrer l'inclusion, il suffit de voir que la représentation régulière du groupe abélien $G/D(G)$ est fidèle et somme directe de représentations de degré 1 de $G/D(G)$. Donc, par passage au quotient, on obtient une représentation de G de noyau $D(G)$ qui se réalise ainsi en une intersection de noyaux de représentations de degré 1.

Exercice 4 [Critère de simplicité]

Montrer qu'un groupe est simple si et seulement si tous les K_i, pour $i \in \mathrm{Irr}(G)$ non trivial, sont réduits à l'identité. Observer la simplicité de $\mathfrak{A}_5$ sur sa table des caractères.
Pour chaque ligne de la table des caractères, à l'exception de la ligne correspondant au caractère trivial, on voit que le degré n'apparaît qu'une fois (dans la première colonne).

Exercice 5 Montrer que si, sur une des lignes de la table des caractères, on a $\chi(g) = \chi(e)$ implique $g = e$, alors le centre de G est cyclique.
En effet, cela implique que la représentation irréductible S_i correspondante est fidèle, par l'exercice sur le treillis de sous-groupes distingués. Par le lemme de Schur, le centre de G s'injecte dans le groupe $\mathbb{C}^*$. Or, tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps est cyclique.

Exercice 6 Si le caractère χ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, est-ce que les représentations correspondantes V_χ et V_χ^* sont isomorphes ?
Oui, et réciproquement ! C'est dû au fait que le caractère caractérise.

Exercice 7 Montrer que si un caractère a ses valeurs dans $\mathbb{Q}$, alors ses valeurs sont dans $\mathbb{Z}$.
On a vu que le caractère d'un élément g de G est toujours un entier algébrique, puisqu'il est somme de racines de l'unité. Or, tout entier algébrique rationnel est entier.