Université Claude Bernard Lyon 1

Licence "Sciences et technologie"

Première année

Unité d'enseignement Math I

Epreuve de mathématiques

CORRECTION PARTIEL

10 Novembre 2005 – durée : 1 h 30

Il s'agit d'une correction rapide. On a mis en italique les mots cles de la redaction. Ce sont les mots attendus par le correcteur.

Le bareme est le suivant
7 pts sur l'exercice 1,
5 pts sur l'exercice 2,
3 pts sur l'exercice 3,
5 pts sur l'exercice 4 (sans le bonus),
3 pts sur le bonus de l'exercice 4.

Exercice 1 (Relations et classes d'équivalence)

1. $\mathcal{R}$ est la relation dans $\mathbb{Z}$:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N},\ x, y \in \mathbb{Z}.$$

   * $\mathcal{R}$ est *reflexive* : $x - x = 0 \in \mathbb{N} \Rightarrow x\mathcal{R}x$.
   * $\mathcal{R}$ est *antisymetrique* : $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x - y \in \mathbb{N}$ et $y - x \in \mathbb{N} \Rightarrow x - y \geq 0$ et $y - x \geq 0 \Rightarrow x = y$.
   * $\mathcal{R}$ est *transitive* : $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x - y \in \mathbb{N}$ et $y - z \in \mathbb{N} \Rightarrow (x - y) + (y - z) \geq 0 \Rightarrow x - z \in \mathbb{N} \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
   Conclusion, $\mathcal{R}$ est une *relation d'ordre*.
   REMARQUE. Notez qu'on peut faire plus rapide. Dans $\mathbb{Z}$, on a $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \geq y$. La relation $\mathcal{R}$ est donc la relation $\geq$ qui est bien connue pour etre une relation d'ordre.

2. $\mathcal{R}$ est la relation dans $\mathbb{Z}$:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in 2\mathbb{Z},\ x, y \in \mathbb{Z}.$$

   a) * $\mathcal{R}$ est *reflexive* : $x - x = 0 \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow x\mathcal{R}x$.
   * $\mathcal{R}$ est *symetrique* : $x\mathcal{R}y \Rightarrow x - y \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow y - x \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
   * $\mathcal{R}$ est *transitive* : $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x - y \in 2\mathbb{Z}$ et $y - z \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow (x - y) + (y - z) \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow x - z \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
   Conclusion, $\mathcal{R}$ est une *relation d'equivalence*.

b) La classe de 0 est par definition l'ensemble des entiers pairs. La classe de 1 est l'ensemble des entiers impairs. Comme l'ensemble des classes d'equivalence pour $\mathcal{R}$ est une *partition* de $\mathbb{Z}$, on en deduit que $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$ est constitue de la classe de 0 et de la classe de 1.

Exercice 2 (Continuité, dérivabilité)

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ grace au theoreme d'operations sur les fonctions continues. Montrons que f est continue en zero.
$$\lim_{x\to 0^+} x \mid \ln(x) \mid = 0 = f(0).$$
Donc f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. $f(x)$ vaut $x\ln(x)$, resp. $-x\ln(x)$, resp. 0, pour $x > 1$, resp. $0 < x < 1$, resp. $x = 0$.
Donc f est derivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ grace aux theoremes d'operations sur les fonctions derivables.
Si $0 < x < 1$, alors $f'(x) = -1 - \ln(x)$.
Si $x > 1$, alors $f'(x) = 1 + \ln(x)$.
3. Etude en 0.
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x\ln(x)}{x} = +\infty.$$
Donc, f n'est pas derivable en 0.
Etude en 1^-.
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-x\ln(x) - 0}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} -\frac{\ln(x) - 0}{x-1} = -\ln'(1) = -1.$$
Etude en 1^+.
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x\ln(x) - 0}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x) - 0}{x-1} = \ln'(1) = 1.$$
Donc, f n'est pas derivable en 1.

Exercice 3 (Théorème de Rolle) On considere la fonction $h(x) = g'(x)\sin(x) - g(x)\cos(x)$. Comme g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,\pi]$, h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. En particulier, h est *continue* sur $[0,\pi]$ et *derivable* sur $]0,\pi[$. De plus,
$$h(0) = g'(0)\sin 0 - g(0)\cos 0 = -g(0)$$
et
$$h(\pi) = g'(\pi)\sin\pi - g(\pi)\cos\pi = g(\pi).$$

Par hypotheses, $h(0) = h(\pi)$. On peut donc appliquer le *theoreme de Rolle* : il existe c tel que $c \in]0,\pi[$ et $h'(c) = 0$. D'ou
$$g''(c)\sin c + g'(c)\cos c - g'(c)\cos c + g(c)\sin c = 0,$$
ce qui implique
$$(g''(c) + g(c))\sin c = 0.$$

Or, comme $0 < c < \pi$, on a $\sin c \neq 0$. Donc, $g''(c) + g(c) = 0$.

Exercice 4 (Accroissements finis)

1. On applique le *theoreme des accroissements finis* a la fonction exponentielle sur $[0,2]$. Effectivement, e^x est *continue* sur $[0,2]$ et *derivable* sur $]0,2[$. Donc, il existe a, $0<a<2$, tel que $(2-0)e^a = e^2 - e^0$. Ce qui implique $e^a = \frac{e^2-1}{2}$. L'unicite de a vient du fait que l'exponentielle est *injective*.

2. a) Si $c < a$ alors $e^c < e^a$ car l'exponentielle est *strictement croissante* sur $\mathbb{R}$. Donc, d'apres 1) : $e^c < e^a = \frac{e^2-1}{2}$.

   b) Le *theoreme des accroissements finis* applique a l'exponentielle sur $[0,x]$ donne qu'il existe c, $0<c<x$, tel que $e^c(x-0) = e^x - e^0$. Comme $c < x < a$, on a $\frac{e^x-1}{x} = e^c < \frac{e^2-1}{2}$, d'apres 2)a).
   Donc, pour $x < c$,
   $$e^x < (\frac{e^2-1}{2})x - 1.$$

3. QUESTION BONUS. Si $x \in]a,2[$, alors en appliquant le *theoreme des accroissements finis* a l'exponentielle sur $]0,2[$, on obtient qu'il existe c, $x<c<2$, tel que
   $$e^c(2-x) = e^2 - e^x.$$
   Donc, comme $c > a$, il vient $e^c > \frac{e^2-1}{2}$.
   En simplifiant l'inegalite $e^2 - e^x > \frac{e^2-1}{2}(2-x)$, on obtient
   $$e^x < (\frac{e^2-1}{2})x + 1.$$

   Interpretation geometrique.
   $y = (\frac{e^2-1}{2})x + 1$ est exactement l'equation de la droite passant par les points $(0,e^0)$ et $(2,e^2)$. L'inegalite dit donc que, pour $0<x<2$, la courbe d'equation $y=e^x$ passe *en dessous* de la droite passant par les points de la courbe d'abscisse 0 et 2. Ceci est du a la *convexite* de la courbe d'equation $y = e^x$.