Licence 1A G1 (Maths Info)
Mathématiques MT2 Le 4 décembre 2003

Contrôle Continu
durée : 1h30

Les documents ne sont pas autorisés et les calculettes sont interdites. Il est demandé de rédiger avec le plus grand soin.

EXERCICE 1.
Soient E un ensemble et $f : E \to E$ une bijection. Soit $\phi : E \to E$ une application.
1. Montrer que si ϕ est injective alors $f \circ \phi \circ f^{-1}$ l'est aussi.

Soient x et y dans E. On suppose $f \circ \phi \circ f^{-1}(x) = f \circ \phi \circ f^{-1}(y)$. Comme f est bijective, cela entraine $\phi \circ f^{-1}(x) = \phi \circ f^{-1}(y)$ en composant a gauche par f^{-1}. Comme ϕ est injective, cela entraine $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$. Comme f^{-1} est bijective, cela entraine $x = y$. On a montre l'injectivite.

2. Lorsque ϕ est bijective, montrer que est bijective et donner sa bijection réciproque.

Soit $\psi = f \circ \phi^{-1} \circ f^{-1}$. On a $\psi \circ (f \circ \phi \circ f^{-1}) = f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = Id$. De meme, on obtient $(f \circ \phi \circ f^{-1}) \circ \psi = Id$. Ceci prouve que l'application $f \circ \phi \circ f^{-1}$ est bijective et de reciproque ψ.

EXERCICE 2.
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. La fonction f est elle continue sur $\mathbb{R}$?

La fonction est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composee de fonctions continues. Il reste a montrer qu'elle est continue en 0. On sait que $\lim_0 \frac{\sin x}{x} = 1$. Donc f est continue a gauche en 0. De plus, $\lim_0 x^2 + 1 = 1$ ce qui prouve que f est continue a droite en 0. Conclusion, f est bien continue en 0.

2. Déterminer l'ensemble des points où f est dérivable.

Comme precedemment, f est derivable sur $\mathbb{R}^*$. La derivee a droite en 0 de f est $(x^2 + 1)'(0) = 2x(0) = 0$. La derivee a gauche en zero ne se calcule pas de la meme maniere il faut faire le calcul suivant $\lim_0 \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_0 \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_0 \frac{x}{6} = 0$. Il y a egalite des derivees a gauche et a droite donc f est derivable sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer la dérivée de f aux points x où elle est dérivable.

En zero la derivee est nulle. En x positif, elle vaut $2x$. En x negatif elle vaut $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

EXERCICE 3.

1. Ecrire les développements limités à l'ordre 4 dans un voisinage de 0 des fonctions

$$x \mapsto (\sin x)^2 \text{ et } x \mapsto \cos x - 1.$$

On a $(\sin x)^2 = (x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x))^2 = x^2 - 2\frac{x^4}{6} + x^5\varepsilon_1(x)$, ou ε et ε' sont des fonctions dont la limite est nulle en zero. Conclusion, le developpement limite de la fonction $(\sin x)^2$ a l'ordre 4 est $x^2 - \frac{x^4}{3} + x^4\varepsilon(x)$.

Le developpement limite a l'ordre 4 de $\cos x - 1$ a l'ordre 4 en zero est $-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$.

2. En déduire

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x) - (\sin x)^2}{(\tan x)^2(1-\cos x)}.$$

D'apres 1) , le numerateur est equivalent en zero a $-\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^4 = \frac{1}{4}x^4$. Le denominateur est equivalent en zero a $\tan^2(\frac{1}{2}x^2)$ lui meme equivalent a $\frac{1}{4}x^4$. Conclusion la limite cherchee est 1.

EXERCICE 4.

On considère une application $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xg(x)}{\ln x} = 0.$$

1. Ecrire la définition du cours de la proposition suivante : la fonction f tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Pour tout ε dans $\mathbb{R}^{+*}$, il existe a dans $\mathbb{R}^{+*}$ tel que $x \geq a$ implique $\mid f(x) \mid < \varepsilon$.

2. Montrer qu'il existe a dans $\mathbb{R}^+$ tel que l'on ait :

$$x \geq a \Rightarrow x \mid g(x) \mid \leq \ln x.$$

Il suffit de prendre $\varepsilon = 1$ dans la formule precedente.

3. En déduire que g possède une limite quand x tend vers $+\infty$ et préciser cette limite.

La derniere inegalite donne $0 \leq \mid g(x) \mid \leq \frac{\ln x}{x}$. A l'aide du theoreme des gendarmes, ceci implique que g a une limite nulle en $+\infty$.