Université Claude Bernard Lyon I

Licence "Mathématiques et informatique"

Première année

Unité d'enseignement Math I

Correction de l'épreuve de mathématiques

1ère Session de JANVIER 2004

6 janvier 2004 – durée : 2 heures

Ceci est un resume de redaction. Les mots en italiques sont des termes importants attendus par le correcteur.

Exercice 1

Soit f l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $f(t) = (32+t)^{1/5}$.

1. On a $f'(t) = \frac{1}{5}(32+t)^{-4/5}$ et $f''(t) = -\frac{4}{25}(32+t)^{-9/5}$.

2. La fonction f est *continument derivable* sur $[0, x]$ et *deux fois derivable* sur $]0, x[$ donc on peut appliquer la *formule de Taylor-Lagrange* a l'ordre 2. On obtient

$$(32+x)^{1/5} = 32^{1/5} + \frac{1}{5}32^{-4/5}x - \frac{2}{5}(32+c)^{-9/5}x^2,$$

pour un reel c de $]0, x[$. En calculant, on obtient

$$(32+x)^{1/5} = 2 + \frac{1}{80}x - \frac{2}{5}(32+c)^{-9/5}x^2.$$

La fonction $t \mapsto -\frac{2}{5}(32+t)^{-9/5}$ est *strictement croissante* et negative sur $[0, x]$, d'ou

$$-\frac{2}{5}(32)^{-9/5} < -\frac{2}{5}(32+c)^{-9/5} < 0.$$

D'ou

$$2 + \frac{1}{80}x - \frac{1}{6400}x^2 < (32+x)^{1/5} < 2 + \frac{1}{80}x.$$

3. En posant $x = 1$, on a

$$\frac{161}{80} - \frac{1}{6400} < \sqrt[5]{33} < \frac{161}{80}.$$

Exercice 2

1. $(1+t)^t$ =exp$(t\ln(1+t))$ =exp$(t(t+t\epsilon(t))$ =exp$(t^2+t^2\epsilon(t))$, ou ϵ est une fonction qui a pour limite 0 en 0. Comme la fonction dans l'exponentielle a pour limite 0 en 0, on peut appliquer la *composition des developpements limites.*

   $(1+t)^t$ =exp$(t\ln(1+t)) = 1+t^2+t^2\epsilon(t)$.

2. En déduire le développement limité de la fonction $x \longmapsto x^x$ à l'ordre 2 en $x=1$. On pose $x = 1+t$, ou t est dans un voisinage de 0. On a

   $$x^x = (1+t)^{(1+t)} = (1+t)\times(1+t)^t = (1+t)\times(1+t^2+t^2\epsilon(t)) = 1+t+t^2+t^2\epsilon(t).$$

   Donc,
   $$x^x = 1+(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^2\epsilon(x-1).$$

3. En déduire la valeur de
   $$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x}.$$
   $$\frac{x^x-x}{1-x+\ln x} = \frac{(x-1)^2+(x-1)^2\epsilon(x-1)}{1-x+(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+(x-1)^2\epsilon(x-1)}$$
   $$\frac{x^x-x}{1-x+\ln x} = \frac{(x-1)^2+(x-1)^2\epsilon(x-1)}{-\frac{1}{2}(x-1)^2+(x-1)^2\epsilon(x-1)} = \frac{1+\epsilon(x-1)}{-\frac{1}{2}+\epsilon(x-1)}.$$
   La limite cherchee est donc -2.

Exercice 3

1. Calculer le plus grand commun diviseur de 169 et 117. On applique *l'algorithme d'Euclide.*
   $$169 = 1\times 117+52,$$
   $$117 = 2\times 52+13,$$
   $$52 = 4\times 13+0.$$
   Le PGCD de 169 et 117 est donc 13.

2. Déterminer un couple $(s,t)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ vérifiant :
   $$169s+117t = 26.$$
   On cherche *l'identite de Bezout* lie a cet algorithme:
   $$13 = 117-2\times 52 = 117-2\times(169-117) = -2\times 169+3\times 117.$$
   En multipliant par 2, on obtient
   $$-4\times 169+6\times 117 = 26.$$
   Un couple cherche est $(s,t) = (-4,6)$.

3. Existe-t-il un couple $(s,t)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ vérifiant :
   $$169s+117t = 25\,?$$
   Supposons par l'absurde une telle egalite. Comme 13 divise 169 et 117, il diviserait 25, ce qui est impossible.

Exercice 4 Soit $K = \{\sigma \in \ S_6 \,|\, \sigma(4) = 4, \sigma(5) = 5, \sigma(6) = 6\}$.

1. K est non vide car l'identite y appartient

   Si a et b appartiennent a K alors a et b fixent 4, 5, et 6. Il en resulte que ab^{-1} fixent aussi 4,5 et 6. Donc ab^{-1} est dans K.

2. Quel est le cardinal de K ? Chaque permutation de $\{1, 2, 3\}$ definit un element de K et inversement. Il y a donc $6 = 3$ elements de K.

3. Soit $\sigma \in K$. Calculer σ^6. Comme 6 est le cardinal de K, il resulte du *petit theoreme de Fermat* que pour tout σ de K, σ^6 est l'identite.

4. **QUESTION BONUS** : K est-t-il isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$? Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, il existe un element d'ordre 6 : la classe de 1. Un isomorphisme envoie un element vers un element qui possede le meme ordre. Or, K possede des elements d'ordre 1, 2, 3, mais pas 6.