Chapitre I

Outils de base dans $\mathfrak{S}_n$

La connaissance du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est fondamentale : non seulement tout groupe fini s'injecte dans $\mathfrak{S}_n$, mais tout groupe G agissant sur un ensemble fini à n éléments fournit un morphisme de G dans $\mathfrak{S}_n$.

Voici un melting-pot des propriétés de $\mathfrak{S}_n$ à connaître en master.

1. Générateurs
   On note t_i la transposition $(ii+1)$, avec i de 1 à $n-1$.
   $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les t_i.
   Il est aussi engendré par les deux générateurs (12) et $(12\cdots n)$.
2. Relations
   On préfère le système de générateurs donné par les t_i. Les relations sont alors données par
   (a) $t_i^2 = e$,
   (b) les relations de tresses : $t_i t_{i+1} t_i = t_{i+1} t_i t_{i+1}$.
   (c) relations de commutations : $t_i t_j = t_j t_i$, $|i-j| \geq 2$.
3. La formule de conjugaison.
   Ou comment effectuer la conjugaison d'une permutation sur un cycle ? S'il n'y a qu'une formule à retenir, c'est celle-là :
   $$\sigma(i_1 i_2 \cdots i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\sigma(i_2)\cdots\sigma(i_k))$$
4. Le centre : pour $n > 2$, $Z(\mathfrak{S}_n) = \{e\}$.
5. La signature $\epsilon(\sigma) = \prod \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} \in \{1,-1\}$, où $\{i,j\}$ parcourt l'ensemble des paires de $[1,n]$.
   ϵ est un morphisme de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{1,-1\}$.
   Mieux ! Tout morphisme de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$ est soit trivial, soit égal à ϵ.
6. Les classes de conjugaisons
   (a) Partition associée à une classe.
   A chaque permutation σ, on associe la partition de $p(\sigma)$ de n correspondant à sa décomposition en cycles disjoints.
   Par exemple : $\sigma = (185)(374)(29) \in \mathfrak{S}_9$, on fait correspondre la partition $p(\sigma) = 3 \geq 3 \geq 2 \geq 1$.
   Deux permutations σ et σ' sont conjuguées ssi $p(\sigma) = p(\sigma')$.

(b) Cardinal d'une classe

Pour une partition donnée p, on note k_i le nombre de i qui apparaissent dans p. Alors le cardinal de la classe de conjugaison associée à p est égal à $\frac{n!}{\prod_i k_i! i^{k_i}}$.

7. Le groupe alterné. $\mathfrak{A}_n := \ker \epsilon$.
   (a) $\mathfrak{A}_n$ est d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_n$,
   (b) la suite exacte $1 \to \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{S}_n \to \{1, -1\} \to 1$ possède une section. En particulier $\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{A}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,
   (c) tout sous-groupe d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_n$ est égal à $\mathfrak{A}_n$,
   (d) $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles,
   (e) $\mathfrak{A}_n$ est simple pour $n \geq 5$.
8. Les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$.
   Pour $n \neq 4$. Il n'y a que $\{e\}$, $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$, pour $n \geq 5$.
   Pour $n = 4$, il y a aussi le *Viergruppe* $V_4 := \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
9. Tout sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.
10. Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$.
    Pour $n \neq 6$, tout automorphisme de $\mathfrak{S}_n$ est intérieur. On a donc,

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n) = \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n) \simeq \mathfrak{S}_n / Z(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{S}_n$$

(si $n \neq 2$, pour la dernière égalité.)