Algèbre, Master 1 **9 november 2017**
2017–2018

Examen partiel d'Algèbre

Durée 2 heures

LES DOCUMENTS NE SONT PAS AUTORISÉS

Problème 1 On se propose de montrer que la seule solution entière de l'équation $y^2 = x^3 - 1$ est $(x, y) = (1, 0)$.

1. Montrer que l'anneau $Z[i]$ est euclidien.
2. Quels sont les inversibles de $Z[i]$? (On demande une preuve complète.)
3. Montrer par l'absurde que x est impair. En déduire que y est pair.
4. Montrer alors par l'absurde que $1 + i$ ne divise pas $y \pm i$ dans $Z[i]$.
5. Par ailleurs, les nombres $1 \pm i$ sont-ils irréductibles dans $Z[i]$? Justifiez votre réponse.
6. Montrer que $y + i$ et $y - i$ sont premiers entre eux dans $Z[i]$, puis, que $y + i$ est un cube dans $Z[i]$. (Vous n'avez pas besoin de 5.)
7. Conclure.

Problème 2 Soit p, q deux nombres premiers distincts. On veut montrer qu'un groupe d'ordre p^2q n'est pas simple. Supposons donc, par l'absurde, un groupe G simple d'ordre p^2q.

1. En supposant que $p > q$ trouver le nombre de p-Sylow. Conclure.
2. On suppose ici $p < q$.
   (a) Trouver le nombre de q-Sylow.
   (b) Trouver le nombre d'éléments du groupe G d'ordre q.
   (c) Montrer que G contient au moins p^2 éléments dont les ordres se divisent par p.
   (d) En déduire une absurdité.

Problème 3 Soit p un nombre premier. On pose $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et on rappelle que, pour tout $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel V, $\mathrm{GL}(V)$ désigne le groupe des automorphismes $\mathbb{F}_p$-linéaires de V. La matrice d'un automorphisme $g \in \mathrm{GL}(V)$ dans une base b de V est notée $\mathrm{Mat}_b(g)$.

On considère dans tout cet exercice un groupe fini G d'ordre p^k, $k \in \mathbb{N}$.

1. Supposons que G opère sur un ensemble fini X dont le cardinal n'est pas divisible par p. Démontrer qu'il existe un élément $x \in X$ tel que $gx = x$ pour tout $g \in G$.
2. On suppose maintenant qu'il existe un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel V de dimension finie n tel que G soit un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$. On se propose de démontrer qu'il existe une base de V dans laquelle la matrice de chaque élément de G est triangulaire supérieure avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1

(a) Justifier que G opère sur $V \setminus \{0\}$ puis, en utilisant la question précédente, démontrer qu'il existe un vecteur non nul $v \in V$ tel que $gv = v$ pour tout $g \in G$.

(b) Considérons une base $b = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de V avec $v_1 = v$. On pose $V' = \mathrm{Vect}(v_2, \dots, v_n)$ et $b' = (v_2, \dots, v_n)$.

Démontrer qu'il existe un homomorphisme de groupes $\rho : G \to \mathrm{GL}(V')$ tel que, pour tout élément g de G,

$$\mathrm{Mat}_b(g) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{Mat}_{b'}(\rho(g)) & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

(c) En raisonnant par récurrence sur la dimension n de V, démontrer qu'il existe une base de V dans laquelle la matrice de chaque élément de G est triangulaire supérieure avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1.