Université Claude Bernard Lyon 1

Licence "Sciences et technologie"

Première année

Unité d'enseignement Math I

Epreuve de mathématiques

PARTIEL

10 Novembre 2005 – durée : 1 h 30

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée.

La qualité de la rédaction est un élément d'appréciation significatif.

Exercice 1 (Relations et classes d'équivalence)

Soit A une partie de $\mathbb{Z}$. On considère la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{Z}$ donnée par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in A,\ x, y \in \mathbb{Z}.$$

1. On suppose $A = \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
2. On suppose que A est l'ensemble $2\mathbb{Z}$ constitué des nombres entiers pairs.
   a) Montrer que dans ce cas $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   b) Décrire la classe de 0 et la classe de 1 pour cette relation, puis préciser toutes les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.

Exercice 2 (Continuité, dérivabilité)

On considère la fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \begin{cases} x \mid \ln(x) \mid & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée en étudiant deux cas.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 3 (Théorème de Rolle) Soit $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $g(0) = -g(\pi)$.

Montrer qu'il existe $c \in]0,\pi[$ tel que $g(c) + g''(c) = 0$.

Indication : on pourra appliquer le théorème de Rolle à la fonction $h(x) = g'(x)\sin(x) - g(x)\cos(x)$.

Exercice 4 (Accroissements finis)

1. Montrer qu'il existe un unique réel $a \in]0, 2[$ tel que

$$e^a = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

2. a) Soit c un réel tel que $c < a$. Montrer que l'on a

$$e^c < \frac{e^2 - 1}{2}.$$

   b) Soit $x \in]0, a[$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction exponentielle sur $]0, x[$, montrer que

$$e^x < (\frac{e^2 - 1}{2})x + 1.$$

3. QUESTION BONUS. Donner une inégalité analogue pour $x \in]a, 2[$. Pouvez vous donner une interprétation géométrique à ces résultats ?