Université Claude Bernard Lyon 1

Licence "Sciences et technologie"

Première année

Unité d'enseignement Math II-ALGEBRE

Epreuve de mathématiques

Examen

29 Mai 2006 – durée : 2 h

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. La qualité de la rédaction est un élément d'appréciation significatif.

Exercice 1 Soit a un réel quelconque.
Calculer le déterminant de la matrice C_a suivante

$$C_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Exercice 2 On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique (e_1, e_2, e_3). Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\phi(e_1) = -e_1 + e_2 + e_3, \ , \phi(e_2) = e_1 - e_2 + e_3, \ , \phi(e_3) = e_1 + e_2 - e_3.$$

1) Donner la matrice B de ϕ dans la base (e_1, e_2, e_3).
2) Trouver le polynôme caractéristique de B et en donner une forme factorisée.
3) Calculer les valeurs propres et leur multiplicité.
4) Donner une base des sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$E_1 := \{u, \ \phi(u) = u\}, \ E_{-2} := \{u, \ \phi(u) = -2u\}.$$

5) Déduire de 4) que ϕ est diagonalisable. Donner une matrice de passage P vers une base de vecteurs propres ainsi qu'une forme diagonalisée D de ϕ correspondante.

Exercice 3 On considère la matrice A à coefficients entiers

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -20 \\ -10 & 21 & -100 \\ -2 & 4 & -19 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que la matrice est inversible. Calculer son inverse.

2) Soit I_3 la matrice identité (3×3). Déduire de 1) que $A^n = I_3$, si n est pair et $A^n = A$ si n est impair.
3) Utiliser 1) pour résoudre le système

$$\begin{cases} -x + 4y - 20z & = 1 \\ -10x + 21y - 100z & = -1 \\ -2x + 4y - 19z & = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Exercice 4 On considère une matrice *inversible* E de taille $(n \times n)$ à coefficients dans un corps k. On notera le polynôme caractéristique de E

$$\chi_E(X) = \det(E - XI_n),$$

où X est une indéterminée et I_n la matrice identité $(n \times n)$. Montrer la formule suivante

$$\chi_{E^{-1}}(X) = \frac{(-1)^n X^n}{\det(E)} \chi_E(\frac{1}{X}).$$