

PLANCHE D'EXERCICES I

- MISE EN BOUCHE -

Exercice 1. Trouver des bases de l'espace des lignes et de l'espace des colonnes de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Quelles sont les dimensions des noyaux de l'application linéaire représentée par \mathbf{A} et de celle représentée par sa transposée. Déterminer des bases de ces noyaux.

Exercice 2. Soit \mathcal{T}^s (resp. \mathcal{T}^i) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que \mathcal{T}^s et \mathcal{T}^i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}^s + \mathcal{T}^i$. Cette somme est-elle directe ?
3. Quels sont les dimensions des sous-espaces \mathcal{T}^s et \mathcal{T}^i ?
4. Montrer que toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

Exercice 3. Donner les dimensions des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ suivants

- i) le sous-espace vectoriel des matrices à coefficients constants,
- ii) le sous-espace vectoriel des matrices diagonales,
- iii) le sous-espace vectoriel des matrices symétriques,
- iv) le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.

Exercice 4.* Soit Π le plan de \mathbb{R}^3 d'équation $x + 3y + 5z = 0$ et soit Δ la droite d'équation $3x = 5y = 15z$. Notons u la projection de \mathbb{R}^3 sur le plan Π parallèlement à la droite Δ .

1. Écrire la matrice de l'endomorphisme u dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
2. Sans calcul, trouver une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de u est la plus simple possible, i.e., ayant le plus grand nombre de coefficients nuls.

Exercice 5.* Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant $u^2 = \text{id}_E$.

1. Montrer que

$$E = \text{Ker}(u - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u + \text{id}_E).$$

2. Montrer que si $u \neq \text{id}_E$ et $u \neq -\text{id}_E$, alors il existe une base de E dans laquelle l'endomorphisme u est représenté par la matrice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_q \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{1}_p$ et $\mathbf{1}_q$ désignent les matrices identités de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ respectivement.

3. Montrer que les entiers p et q ne dépendent que de u .

Exercice 6. ^{*} Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2 et $B = (e_1, e_2)$ une base de E . Soit u l'endomorphisme de E représenté dans la base B par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que $u^2 = 0$
2. Déterminer le rang, l'image et le noyau de u .
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 7. ^{*} Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que

$$A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)\mathbf{1}_2 = 0.$$

Exercice 8. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que

$$A^2 = \lambda A + \mu \mathbf{1}_n.$$

1. Montrer que si μ est non nul, la matrice A est inversible et que

$$A^{-1} = \mu^{-1}(A - \lambda \mathbf{1}_n).$$

2. Montrer que pour tout entier k , la matrice A^k s'écrit comme une combinaison linéaire des matrices A et $\mathbf{1}_n$.

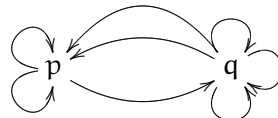
Exercice 9. ^{*} On considère les deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{bmatrix}.$$

1. Écrire A comme combinaison linéaire de J et $\mathbf{1}_n$.
2. Calculer J^k et A^k , pour tout entier k .

Exercice 10. ^{*} Soit $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que $P^{-1}MP$ est de la forme $D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$.
2. Combien y a-t-il de chemins de longueur 2, 3 ou 4 dans le graphe ci-dessous ?



3. Comparer les résultats avec M^2, M^3, M^4 que l'on calculera à l'aide de la matrice D .
4. Déterminer, pour tout entier $k \geq 1$, le nombre de chemins de longueur k dans le graphe suivant

