Annexe A

Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Dans cette annexe, nous rappelons (sans donner de démonstrations) les résultats clés d'analyse fonctionnelle utilisés dans ce cours. On pourra consulter pour plus de détails [11, 12, 2, 1].

A.1 Produit de Cauchy de séries

Dans cette section, nous allons donner un résultat important sur le produit de deux séries. Avant nous rappelons la définition de convergence d'une série indexée par $\mathbb{Z}$.

Définition A.1.1 *Soient E un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite (indexé par $\mathbb{Z}$) d'éléments de E. On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ de terme général u_n est :*

(a) *convergente si chacune des deux séries usuelles $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{-n}$ est convergente. On pose alors*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}.$$

(b) *normalement convergente si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|u_n\|$ est convergente.*

Si E est complet, alors la convergence normale implique la convergence.

Proposition A.1.1 *Soient* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n$ *deux séries à termes généraux* u_n *et* v_n *dans une algèbre de Banach* E*. Si les deux séries sont normalement convergentes, alors la série de terme général*

$$w_n := \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k},$$

est bien définie et normalement convergente. De plus, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} w_n = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n\right).$$

Pour une preuve de cette proposition, on pourra se reporter à [1].

A.2 Quelques grands principes d'analyse fonctionnelle

A.2.1 Théorèmes de Hahn-Banach

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On désigne par E^* le dual (topologique) de E, i.e. l'espace des formes linéaires et continues sur E. Rappelons que E^* est muni de la norme duale :

$$\|\varphi\|_{E^*} = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\le 1}} |\varphi(x)|.$$

Le théorème de Hahn-Banach affirme que si G est un sous-espace vectoriel de E et si $g : G \longmapsto \mathbb{K}$ est linéaire et continue de norme

$$\|g\|_{G'} := \sup_{\substack{x\in G\\ \|x\|\le 1}} |g(x)|,$$

alors, il existe $f \in E^*$ qui prolonge g et telle que

$$\|f\|_{E^*} = \|g\|_{G'}.$$

Ce théorème admet deux corollaires importants.

Corollaire A.2.1 *Pour tout $x \in E$, il existe $\varphi_x \in E^*$ tel que $\|\varphi_x\| = 1$ et $\varphi_x(x) = \|x\|$.*

Le deuxième corollaire (qui se déduit aisément du premier) affirme que E^* sépare les points de E.

Corollaire A.2.2 *Soit $x, y \in E$ et supposons que pour tout $\varphi \in E^*$, on a $\varphi(x) = \varphi(y)$. Alors $x = y$.*

A.2.2 Théorème de Banach-Steinhaus

Le théorème de Banach-Steinhaus affirme qu'une famille d'opérateurs linéaires et continues qui est ponctuellement bornée est en fait uniformément bornée. Plus précisément :

Théorème A.2.1 *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires et continues de E dans F. On suppose que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| < +\infty, \qquad \forall x \in E.$$

Alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| < +\infty.$$

Autrement dit, il existe une constante c telle que

$$\|T_i x\| \leq c\|x\|, \qquad \forall x \in E, \forall i \in I.$$

Ce résultat admet une conséquence intéressante qui affirme qu'un ensemble d'un espace de Banach qui est faiblement borné est en fait borné (en norme).

Corollaire A.2.3 *Soit E un espace de Banach et soit M un sous-ensemble de E. Supposons que, pour tout $\varphi \in E^*$, $\varphi(M)$ est borné. Alors M est borné.*

A.2.3 Critère d'inversibilité à gauche

Rappelons tout d'abord la définition d'inversibilité à gauche.

Définition A.2.1 *Soient X et Y deux espaces de Banach et $T : X \longrightarrow Y$ une application linéaire et bornée. On dit que T est inversible à gauche s'il existe $V : Y \longrightarrow X$ linéaire et bornée telle que $VT = Id_X$.*

En utilisant le théorème d'isomorphisme de Banach, on peut montrer le critère suivant pour l'inversibilité d'un opérateur à gauche.

Théorème A.2.2 *Soient X, Y deux espaces de Banach et $T : X \longrightarrow Y$ une application linéaire et bornée. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est inversible à gauche.*

(ii) *T est injectif et à image fermée.*

(iii) *Il existe $c > 0$ tel que*

$$\|Tx\|_Y \geq c\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

A.3 Topologie faible* et théorème de Banach-Alaoglu

Tout d'abord commençons par un rappel de topologie générale. Soit X un ensemble et soit $(Y_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour chaque $i \in I$, on se donne une application $\varphi_i : X \longrightarrow Y_i$. La question naturelle qui se pose est de munir X de la topologie τ la plus faible, i.e. avec le minimum d'ouverts, qui rende continues toutes les applications φ_i, $i \in I$. La réponse est la suivante :

Théorème A.3.1 *Soit τ la topologie sur X dont les ouverts s'obtiennent en considérant d'abord des intersections finies d'ensembles de la forme $\varphi^{-1}(\omega_i)$, ω_i ouvert de Y_i, et ensuite des réunions quelconques. Alors τ est la topologie la plus faible qui rende continues toutes les applications φ_i, $i \in I$.*

Définition A.3.1 *Etant donnée une topologie $\mathcal{S}$ sur E et $x \in E$, on appelle base de voisinage de x pour la topologie $\mathcal{S}$ toute collection $\mathcal{B}$ d'ouverts (pour $\mathcal{S}$) contenant x et telle que chaque voisinage ouvert de x contient un élément de $\mathcal{B}$.*

Nous allons maintenant appliquer ce qui précède dans le contexte des espaces de Banach pour définir la topologie faible*.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace de Banach ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit E^* son dual topologique. Pour chaque $x \in E$, on considère l'application $\varphi_x : E^* \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi_x(f) = f(x), \qquad f \in E^*.$$

Définition A.3.2 *La topologie faible* est la topologie la plus faible sur E^* rendant continues toutes les applications φ_x, $x \in E$.*

On peut préciser un peu plus les bases de voisinage d'un point pour cette topologie.

Proposition A.3.1 *Soit $f_0 \in E^*$. Une base de voisinage de f_0 pour la topologie faible* est obtenue en considérant tous les ensembles de la forme*

$$V = \{\varphi \in E^* : |\varphi(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, \forall i \in I\},$$

où I est finie, $x_i \in E$ et $\varepsilon > 0$.

L'importance de la topologie faible* est sans aucun doute contenue dans le théorème de Banach-Alaoglu.

Théorème A.3.2 (Banach-Alaoglu) *Soit E un espace de Banach, E^* son dual topologique et*

$$B_{E^*} = \{\varphi \in E^* : \|\varphi\| \leq 1\}$$

la boule unité fermée de E^*. Alors B_{E^*} est compacte pour la topologie faible*.

Annexe B

Quelques compléments d'analyse complexe

L'objet de cet appendice est de développer la théorie classique de l'analyse complexe dans le contexte des fonctions à valeurs vectorielles.

Dans tout ce qui suit, $(E, \|\cdot\|)$ va désigner un espace de Banach, $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Rappelons que l'espace $\mathcal{B}(I, E)$, des fonctions bornées sur I à valeurs dans E, muni de la norme du sup

$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in I} \|f(t)\|, \qquad (f \in B(I, E)),$$

est un espace de Banach.

B.1 Rappels d'analyse complexe

Dans ce premier paragraphe, nous rappelons deux résultats classiques (le théorème de Cauchy et les formules de Cauchy) pour des fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour donner un énoncé suffisamment général, nous allons avoir besoin de la notion de système de courbes fermées orientées entourant un compact dans un ouvert du plan complexe. Cette notion est assez intuitive mais pour l'introduire proprement, cela nécessite un peu de travail ! Commençons par rappeler quelques notions élémentaires sur les courbes et fixons la terminologie utilisée dans ce cours.

Définition B.1.1 (a) *On appelle courbe (ou chemin) dans* $\mathbb{C}$ *toute application continue* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$*, où* $[a,b]$ *est un intervalle compact de* $\mathbb{R}$*. L'image d'une courbe* γ *sera notée* γ^**, c'est un compact de* $\mathbb{C}$*.*

(b) *On dit qu'une courbe* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *est fermée si* $\gamma(a) = \gamma(b)$*.*

(c) *On dit qu'une courbe* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *est de classe* C^k *par morceaux,* $k \geq 1$*, s'il existe une subdivision* $s = (s_0, s_1, \ldots, s_N)$ *de l'intervalle* $[a,b]$ *telle que la restriction de* γ *à chaque intervalle* $[s_i, s_{i+1}]$ *soit de classe* C^k*.*

(d) *Une courbe* γ *est dite simple si* $\gamma(s) = \gamma(t)$ *implique que soit* $s = t$ *soit* $s = a$ *et* $t = b$*.*

(e) *Etant donné une courbe* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$*, la courbe opposée, notée* $\overline{\gamma}$*, est définie sur le même intervalle par*

$$\overline{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t), \qquad t \in [a,b].$$

Enfin si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est une courbe de classe C^1 par morceaux et f est une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, contenant γ^*, on définit l'*intégrale curviligne* de f le long de γ comme :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt, \tag{B.1}$$

Nous allons maintenant rappeler la notion d'indice.

Définition B.1.2 *Soit* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *une courbe fermée de classe* C^1 *par morceaux et soit* $a \notin \gamma^*$*. On appelle indice de* γ *par rapport à* a *le nombre défini par*

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,dz.$$

Donnons quelques propriétés clés de l'indice. Pour une démonstration de ce résultat, on pourra se reporter à [10].

Proposition B.1.1 *Soit* γ *une courbe fermée de classe* C^1 *par morceaux. Alors*

(a) $n(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$*, pour tout* $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$*.*

(b) $a \longmapsto n(\gamma, a)$ *est constante sur chaque composante connexe de* $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

(c) $n(\gamma, a)$ *s'annule sur la composante connexe non bornée de* $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Finalement on a le résultat suivant très intuitif mais dont la démonstration n'est pas si facile...(voir par exemple [9]).

Théorème B.1.1 (Théorème de Jordan) *Soit* γ *une courbe fermée, simple, de classe* C^1 *par morceaux. Alors* $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ *a exactement deux composantes connexes. De plus, la frontière de chacune d'elles est égale à* γ^*.

Il suit de la proposition B.1.1 et du théorème de Jordan que si γ est une courbe fermée, simple, de classe C^1 par morceaux, alors $n(\gamma, a)$ prend seulement deux valeurs : sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, $n(\gamma, a) \equiv 0$; sur la composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, $n(\gamma, a)$ est soit identiquement égale à 1, soit identiquement égale à -1.

Nous allons maintenant définir l'orientation d'une courbe ou d'un système de courbes.

Définition B.1.3 *Soit* $\gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ *un système de courbes fermées, de classe* C^1 *par morceaux. On note*

$$\gamma^* = \bigcup_{j=1}^{m} \gamma_j^*$$

et pour $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, *on pose*

$$n(\gamma, a) = \sum_{j=1} n(\gamma_j, a).$$

On dit que γ *est positivement orientée si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(a) $\gamma_i^* \cap \gamma_j^* = \emptyset$, $i \neq j$.

(b) *chaque courbe fermée* γ_j *est simple.*

(c) $n(\gamma, a) = 0$ *ou 1*, $\forall a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

L'intérieur de γ, noté Ext(γ), est défini par

$$Int(\gamma) = \{a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* : n(\gamma, a) = 1\}.$$

L'extérieur de γ, noté Ext(γ), est défini par

$$Ext(\gamma) = \{a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* : n(\gamma, a) = 0\}.$$

Si f est continue sur un voisinage de γ^*, on posera

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f(z)\, dz.$$

Etant donné un compact K dans un ouvert Ω du plan complexe, le résultat suivant affirme l'existence l'existence d'un système de courbes fermées, de classe C^1 par morceaux et positivement orienté, qui "entoure" K dans Ω. Ce résultat assez intuitif possède une preuve dont l'idée est simple mais dont les détails techniques sont un peu fastidieux. On pourra se reporter à [3] ou [10].

Proposition B.1.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et K un compact contenu dans Ω. Alors il existe un système de courbes fermées dans $\Omega \setminus K$, $\gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$, de classe C^1 par morceaux, positivement orienté, tel que*

$$K \subset Int(\gamma) \quad et \quad \mathbb{C} \setminus \Omega \subset Ext(\gamma).$$

Définition B.1.4 *On dit qu'un système de courbes fermées de classe C^1 par morceaux $\gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ entoure le compact K dans Ω si les conditions suivantes sont réalisées :*

(a) $\gamma^* \subset \Omega \setminus K$.

(b) *γ est positivement orienté.*

(c) *$K \subset Int(\gamma)$ et $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset Ext(\gamma)$.*

Exemple B.1.1 *Considérons l'ouvert $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : 1/8 < |z| < 2\}$ et le compact $K := \{z \in \mathbb{C} : 1/2 < |z| < 1\}$. Notons $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les trois courbes fermées* *définies, pour $t \in [0,1]$, par*

$$\gamma_1(t) = \frac{3}{2}e^{2i\pi t}, \quad \gamma_2(t) = \frac{1}{4}e^{-2i\pi t}, \quad \gamma_3(t) = \frac{1}{4}e^{2i\pi t}.$$

Alors on vérifie facilement que les deux systèmes $\{\gamma_1\}$ et $\{\gamma_1, \gamma_3\}$ n'entourent pas le compact K dans Ω. Par contre, le système $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ entoure le compact K dans Ω.

Nous pouvons maintenant énoncer les deux résultats principaux que nous allons chercher par la suite à généraliser dans le cadre vectoriel. Pour une preuve de ces résultats classiques, on pourra se reporter à [6, 3, 10, 13].

Proposition B.1.3 (Théorème de Cauchy scalaire) *Soient Ω un ouvert du plan complexe, γ_1 et γ_2 deux systèmes de courbes fermées, de classe C^1 par morceaux, et contenues dans l'ouvert Ω. Si, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $Ind_{\gamma_1}(z) = Ind_{\gamma_2}(z)$, alors pour toute fonction f holomorphe sur Ω, on a*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz.$$

Proposition B.1.4 (Formule de Cauchy scalaire) *Soient K un compact contenu dans un ouvert Ω du plan complexe. Si le système de courbes fermées γ entoure le compact K dans Ω, alors pour toute fonction f holomorphe sur Ω, on a*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z)^{n+1}}\, d\lambda, \qquad z \in K, n \in \mathbb{N}.$$

B.2 Intégration des fonctions réglées à valeurs vectorielles

Nous allons dans ce paragraphe développer la notion d'intégrale de Riemann pour des fonctions (réglées) à valeurs vectorielles. Cela sera ensuite utilisé pour intégrer des fonctions complexes à valeurs vectorielles et ainsi donner un sens aux propositions B.1.3 et B.1.4 dans le cadre vectoriel.

Définition B.2.1 *Une fonction $f : I = [a,b] \longrightarrow E$ est appelée fonction en escalier s'il existe une partition*

$$P : a = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n = b$$

telle que f est constante sur chacun des intervalles $]t_{j-1}, t_j[$. L'ensemble $\mathcal{E}(I,E)$ de toutes les fonctions en escalier forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(I,E)$.

Pour chaque fonction f en escalier (définie à partir de la partition P ci-dessus), on appelle intégrale de f l'élément de E défini par

$$\int_a^b f(t)\,dt := \sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1})f(\zeta_j), \tag{B.2}$$

avec $\zeta_j \in]t_{j_1}, t_j[$.

Il est facile de montrer que la valeur du membre de droite de (B.2) ne dépend pas de la partition P choisie et donc l'intégrale est bien définie.

Lemme B.2.1 *L'application $\mathfrak{I} : \mathcal{E}(I,E) \longrightarrow E$, définie par*

$$\mathfrak{I}f := \int_a^b f(t)\,dt, \qquad (f \in \mathcal{E}(I,E)),$$

est une application linéaire continue de $(\mathcal{E}(I,E), \|\cdot\|_\infty)$ dans E. De plus, pour toute fonction $f \in \mathcal{E}(I,E)$, on a

$$\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

Preuve : tout découle facilement de la définition et des calculs suivants (qui utilisent l'inégalité triangulaire) :

$$\begin{aligned}\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\| &= \left\|\sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1})f(\zeta_j)\right\| \leq \sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1})\|f(\zeta_j)\| \\ &= \int_a^b \|f(t)\|\,dt \leq \sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1})\|f\|_\infty = (b-a)\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

□

Définition B.2.2 *L'ensemble des fonctions réglées $\mathcal{R}(I, E)$ est définie comme l'adhérence de $\mathcal{E}(I, E)$ dans l'espace de Banach $(\mathcal{B}(I, E), \|\cdot\|_\infty)$. Autrement dit, une fonction bornée $f : I \longrightarrow E$ est dite réglée si et seulement si il existe une suite $(f_n)_n$ de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f sur I.*

Théorème B.2.1 *L'application $\mathfrak{J}$ se prolonge (de façon unique) en une application linéaire continue de $\mathcal{R}(I, E)$ dans E. On désignera encore par $\mathfrak{J}$ cette extension et pour $f \in \mathcal{R}(I, E)$, on écrira aussi*

$$\mathfrak{J}(f) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{R}(I, E)$ et toute forme linéaire continue φ sur E, on a

(a) $\left\|\int_a^b f(t)\, dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\, dt \leq (b-a)\|f\|_\infty$.

(b) $\varphi\left(\int_a^b f(t)\, dt\right) = \int_a^b \varphi(f(t))\, dt$.

Preuve : L'unicité du prolongement découle de la densité de $\mathcal{E}(I, E)$ dans $\mathcal{R}(I, E)$. Maintenant, soit $f \in \mathcal{R}(I, E)$; alors il existe une suite $f_n \in \mathcal{E}(I, E)$ telle que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, $n \to +\infty$. Or

$$\|\mathfrak{J}(f_n) - \mathfrak{J}(f_p)\| = \|\mathfrak{J}(f_n - f_p)\| \leq (b-a)\|f_n - f_p\|_\infty.$$

On en déduit que $(\mathfrak{J}f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E complet, donc elle converge. Notons

$$\mathfrak{J}f := \lim_{n\to+\infty} \mathfrak{J}f_n.$$

Il est clair que $\mathfrak{J}$ définit une application linéaire continue sur $\mathcal{R}(I, E)$. Le point (a) vient immédiatement du lemme B.2.1.

Pour le point (b), remarquons que si $f \in \mathcal{E}(I, E)$, alors on a

$$\varphi\left(\int_a^b f(t)\, dt\right) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) f(\zeta_j)\right) = \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) \varphi(f(\zeta_j)) = \int_a^b \varphi(f(t))\, dt.$$

Le résultat découle alors d'un passage à la limite en utilisant la continuité de φ.

□

Théorème B.2.2 *Toute fonction continue $f : I \longrightarrow E$ est réglée.*

Preuve : Comme f est continue sur le compact $I = [a, b]$, il suit du théorème de Heine que f est uniformément continue. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in [a, b]$ satisfaisant $|x - y| \leq \delta$, on a $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$. Soit $P : a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ une partition tel que $\max_{1 \leq j \leq n}(t_j - t_{j-1}) \leq \delta$. Définissons

$$g(a) = f(a) \quad \text{et} \quad g(t) = f(t_j), \quad t_{j-1} < t \leq t_j.$$

Alors $g \in \mathcal{E}(I, E)$ et pour tout $t \in [a, b]$, on a $\|g(t) - f(t)\| \leq \varepsilon$, i.e. $\|g - f\|_\infty \leq \varepsilon$. On en déduit donc que $f \in \mathcal{R}(I, E)$.

□

Remarque B.2.1 *Les fonctions réglées peuvent se caractériser comme les fonctions qui admettent une limite à droite et une limite à gauche en tout point de $[a, b]$ (voir [1]). Donc en particulier, les fonctions continues par morceaux sont aussi réglées.*

Définition B.2.3 *Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une courbe de classe C^1 par morceaux et soit f une fonction continue sur un voisinage de γ^* à valeurs dans E. Alors on définit l'intégrale curviligne de f le long de γ comme*

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt. \tag{B.3}$$

En remarquant que la formule dite “de changement de variable” s'applique aussi aux intégrales vectorielles (exercice !), il est facile de voir que le membre de droite de (B.3) ne dépend que de f et de γ et non de la paramétrisation choisie.

On déduit immédiatement du théorème B.2.1 le résultat suivant.

Théorème B.2.3 *Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une courbe de classe C^1 par morceaux et soit f une fonction continue sur un voisinage de γ^* à valeurs dans E. Alors,*

(a) $\left\| \int_\gamma f(z)\, dz \right\| \leq \int_\gamma \|f(z)\|\, |dz| = \int_a^b \|f(z(t))\| |z'(t)|\, dt.$

(b) *Pour toute forme linéaire φ continue sur E, on a* $\varphi\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right) = \int_\gamma \varphi(f(z))\,dz.$

Nous terminons par une proposition utile dans le cadre des algèbres de Banach.

Proposition B.2.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une courbe de classe C^1 par morceaux et soit f une fonction continue sur un voisinage de γ^* à valeurs dans $\mathcal{A}$. Alors, pour tout $x \in \mathcal{A}$, on a*

$$x\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right) = \int_\gamma x f(z)\,dz, \tag{B.4}$$

et

$$\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right)x = \int_\gamma f(z)x\,dz. \tag{B.5}$$

Preuve : Pour démontrer (B.4), soit M_x l'opérateur de multiplication à gauche par x et soit Λ une forme linéaire continue sur $\mathcal{A}$. Alors ΛM_x est une forme linéaire continue sur $\mathcal{A}$ et on peut appliquer le théorème B.2.3 (b) qui donne

$$\Lambda M_x\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right) = \int_\gamma \Lambda M_x(f(z))\,dz = \int_\gamma \Lambda(f(z)x)\,dz.$$

En réappliquant le théorème B.2.3 (b) au membre à droite de cette dernière égalité, on obtient que

$$\Lambda\left(x\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right)\right) = \Lambda\left(\int_\gamma f(z)x\,dz\right).$$

Le théorème de Hahn-Banach (voir corollaire A.2.2) permet alors d'en déduire (B.4). Pour démontrer (B.5), il suffit d'utiliser le même raisonnement avec l'opérateur de multiplication à droite.

□

B.3 Fonctions holomorphes à valeurs vectorielles

Dans ce paragraphe, nous allons développer la théorie des fonctions holomorphes à valeurs vectorielles. Nous allons en fait donner un peu plus de détails et de résultats que ce qui est réellement utilisé dans ce cours. Notamment, dans une première lecture, on pourra porter son attention uniquement sur les théorèmes B.3.3, B.3.5 et B.3.6.

Comme nous allons le voir, beaucoup de résultats de la théorie des fonctions holomorphes à valeurs scalaires s'étend (sans aucun changement ou presque) au cas vectoriel. L'idée étant la plupart du temps de scalariser le problème (en appliquant une forme linéaire continue), d'utiliser les résultats du cas scalaire et de revenir au cas vectoriel avec le corollaire du théorème de Hahn-Banach (corollaire A.2.2). Même si cette idée est assez simple, nous allons prendre le temps de donner les détails....

Définition B.3.1 *Soit Ω un ouvert du plan complexe, E un espace de Banach et $f : \Omega \longrightarrow E$. On dit que f est holomorphe sur Ω si elle est dérivable en tout point $z_0 \in \Omega$, i.e. si la limite suivante*

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

existe et est finie.

On dit que f est faiblement holomorphe sur Ω si pour tout élément φ du dual de E, la fonction (à valeurs complexes) $\varphi \circ f$ est holomorphe sur Ω.

Nous notons $\mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega, E)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω à valeurs dans E. Dans le cas où $E = \mathbb{C}$, on note plus simplement $\mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega) = \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega, \mathbb{C})$.

Il est évident que toute fonction holomorphe est faiblement holomorphe. En fait, nous allons montrer que la réciproque est aussi vraie. Commençons par un lemme.

Lemme B.3.1 *Soit $f : \Omega \longrightarrow E$ une fonction faiblement holomorphe. Alors f est continue sur Ω.*

Preuve : Soit $a \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(a, r) \subset \Omega$.

Considérons le sous-ensemble de E défini par

$$M = \left\{ \frac{f(z) - f(a)}{z - a} : 0 < |z - a| \leq r \right\}.$$

Montrons que M est faiblement borné. Pour cela considérons $u \in E^*$. Alors, puisque la fonction $u \circ f$ est holomorphe sur Ω, la fonction g, définie par

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{u(f(z)) - u(f(a))}{z - a}, & \text{si } 0 < |z - a| \leq r \\ (u \circ f)'(a), & \text{si } z = a \end{cases}$$

est une fonction continue du compact $\overline{B}(a, r)$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Donc l'image $g(\overline{B}(a, r))$ est un compact de $\mathbb{C}$. Clairement $u(M) \subset g(\overline{B}(a, r))$ et donc $u(M)$ est bornée. Comme cela est vrai pour tout $u \in E^*$, cela signifie que M est faiblement borné. D'après le corollaire A.2.3, cela implique que M est borné. Autrement dit, il existe une constante $K = K(a, r, f) > 0$ telle que pour tout z, $0 < |z - a| \leq r$, on ait

$$\left\| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \right\| \leq K,$$

d'où

$$\|f(z) - f(a)\| \leq K|z - a|.$$

Cette dernière inégalité entraine en particulier que f est continue en a.

□

Pour montrer qu'une fonction faiblement holomorphe est holomorphe, nous allons montrer qu'elle vérifie la formule de Cauchy.

Théorème B.3.1 *Soit $f : \Omega \longrightarrow E$ une fonction faiblement holomorphe et $a \in \Omega$. Alors*

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\, dz,$$

où γ est un système de courbes fermées dans Ω, de classe C^1 par morceaux et qui entoure $\{a\}$.

Preuve : Pour chaque $u \in E^*$, la fonction $u \circ f$ est holomorphe sur Ω. La formule de Cauchy scalaire (proposition B.1.4) donne alors

$$u(f(a)) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{u(f(z))}{z-a}\, dz = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma u\left(\frac{f(z)}{z-a}\right) dz.$$

On applique alors le théorème B.2.3 qui entraine que

$$u(f(a)) = u\left(\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz\right).$$

Cette dernière égalité etant vraie pour tout $u \in E^*$, le corollaire du théorème de Hahn-Banach (corollaire A.2.2) permet alors de conclure que

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

□

Théorème B.3.2 *Toute fonction faiblement holomorphe $f : \Omega \longrightarrow E$ est holomorphe. De plus, pour chaque $a \in \Omega$, on a*

$$f'(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz,$$

où γ_r est n'importe quel cercle positivement orienté $\gamma_r : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_r(t) = a + re^{2i\pi t}$, satisfaisant $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$.

Preuve : D'après le lemme B.3.1, la fonction f est continue sur Ω donc en particulier sur le compact γ_r^*. D'où :

$$K := \sup_{|z-a|=r} \|f(z)\| < +\infty.$$

Considérons maintenant $0 < \delta < r/2$ et choisissons $b \in \Omega$ tel que $0 < |b-a| < \delta$. Alors il est clair que γ_r est une courbe fermée dans Ω, de classe C^1 et qui entoure à la fois $\{a\}$ et $\{b\}$. Le théorème B.3.1 permet alors d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} &= \frac{1}{b-a}\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \left[\frac{f(z)}{z-b} - \frac{f(z)}{z-a}\right] dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz\right\| =& \frac{1}{2\pi}\left\|(b-a)\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{(z-a)^2(z-b)}\,dz\right\|\\ \leq& \frac{|b-a|}{2\pi}\int_{\gamma_r}\frac{\|f(z)\|}{|z-a|^2|z-b|}\,|dz|.\end{aligned}$$

Pour $z\in\gamma_r^*$, remarquons que $|z-a|=r$, $\|f(z)\|\leq K$ et par l'inégalité triangulaire, on a aussi

$$|z-b|\geq|z-a|-|a-b|\geq r-\delta\geq\frac{r}{2}.$$

Ainsi on obtient

$$\left\|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz\right\|\leq\frac{2K\delta}{r^2}. \tag{B.6}$$

Cette inégalité implique que la limite

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

existe et est finie. Ceci signifie donc que f est dérivable en tout point a de Ω et donc f est homomorphe sur Ω. De plus, d'après (B.6), on a

$$f'(a)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz.$$

□

Théorème B.3.3 (Théorème de Cauchy) *Soient Ω un ouvert du plan complexe, γ_1 et γ_2 deux systèmes de courbes fermées, de classe C^1 par morceaux, et contenues dans l'ouvert Ω. Si, pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\Omega$, $Ind_{\gamma_1}(z)=Ind_{\gamma_2}(z)$, alors pour toute fonction $f\in\mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega,E)$, on a*

$$\int_{\gamma_1}f(z)\,dz=\int_{\gamma_2}f(z)\,dz.$$

Preuve : Pour chaque $u\in E^*$, la fonction $u\circ f$ est holomorphe sur Ω. Le théorème de Cauchy scalaire (proposition B.1.3) donne alors

$$\int_{\gamma_1}u(f(z))\,dz=\int_{\gamma_2}u(f(z))\,dz.$$

On applique alors le théorème B.2.3 qui entraine que

$$u\left(\int_{\gamma_1} f(z)\,dz\right) = \int_{\gamma_1} u(f(z))\,dz = \int_{\gamma_2} u(f(z))\,dz = u\left(\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right).$$

Comme l'égalité est vraie pour tout élément $u \in E^*$, le corollaire du théorème de Hahn-Banach (corollaire A.2.2) permet alors de conclure que

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

□

Théorème B.3.4 (Formule de Cauchy) *Soit Ω un ouvert du plan complexe. Toute fonction $f \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega, E)$ est indéfiniment dérivable (au sens complexe) sur Ω. De plus, pour tout point $a \in \Omega$ et chaque entier $n \geq 0$, on a*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz, \tag{B.7}$$

où γ est un système de courbes fermées, de classe C^1 par morceaux et qui entoure le compact $\{a\}$ dans Ω.

Preuve : Pour montrer que f est indéfiniment dérivable, nous allons raisonner par récurrence. Tout d'abord, d'après le lemme B.3.1, nous savons déjà que f est continue sur Ω. Supposons maintenant que f est n-fois dérivable sur Ω. Pour tout élément $u \in E^*$, la fonction (complexe) $u \circ f$ est holomorphe sur Ω donc $(n+1)$-fois dérivable sur Ω. Mais comme u est linéaire, on a $(u \circ f)^{(n)} = u \circ f^{(n)}$. Ceci implique que la fonction $u \circ f^{(n)} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable. Autrement dit, la fonction $f^{(n)}$ est faiblement holomorphe sur Ω, donc holomorphe sur Ω (i.e. dérivable sur Ω), d'après le théorème B.3.2. Ainsi f est $(n+1)$-fois dérivable sur Ω. Par récurrence, on en déduit que f est indéfiniment dérivable sur Ω.

Pour montrer la formule (B.7), considérons $u \in E^*$. Comme la fonction $u \circ f$ est holomorphe sur Ω on peut appliquer les formules de Cauchy scalaire (proposition B.1.3) qui donnent alors

$$(u \circ f)^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{u(f(z))}{(z-a)^{n+1}}\,dz,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, où γ est un système de courbes fermées, de classe C^1 par morceaux et qui entoure le compact $\{a\}$ dans Ω. On applique alors le théorème B.2.3 qui entraine que

$$(u \circ f)^{(n)}(a) = u\left(\frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz\right).$$

Par linéarité de u, on a $(u \circ f)^{(n)}(a) = u(f^{(n)})(a)$ et donc

$$u(f^{(n)})(a) = u\left(\frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz\right).$$

Comme l'égalité est vraie pour tout élément $u \in E^*$, le corollaire du théorème de Hahn-Banach (corollaire A.2.2) permet alors de conclure que

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz.$$

□

Théorème B.3.5 (Développement en série entière) *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$. *Pour toute fonction* $f \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega, E)$ *et tout point* $z_0 \in \Omega$, *la série entière :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

converge uniformément et normalement sur tout compact contenu dans le disque ouvert $D(z_0, \mathrm{dist}(z_0, \Omega^c))$ *et sa somme est égale à* $f(z)$ *en tout point de ce disque. Cette série (appelée la série de Taylor de* f *en* z_0*) est l'unique série entière de la forme* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $a_n \in E$, *dont la somme est* f *dans le disque mentionné. Le rayon de convergence est au moins* $\mathrm{dist}(z_0, \Omega^c)$.

Remarque B.3.1 *On a noté* $\mathrm{dist}(z_0, \Omega^c)$ *la distance de* z_0 *à* Ω^c *si* $\Omega^c \neq \emptyset$ *et* $+\infty$ *sinon.*

Preuve : Soient $0 < r < \mathrm{dist}(z_0, \Omega^c)$, $z, \zeta \in \mathbb{C}$ tels que $|z - z_0| = r$ et $|\zeta - z_0| < r$. Nous avons alors

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{(z-z_0)-(\zeta-z_0)} = \frac{1}{(z-z_0)\left(1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}},$$

cette série étant normalement convergente sur tout compact de la forme $K \times \partial B(z_0, r)$ avec K compact contenu dans $B(z_0, r)$. Nous pouvons alors appliquer la formule de Cauchy (théorème B.3.4) et intervertir l'ordre de l'intégration et de la sommation, ce qui donne

$$\begin{aligned} f(\zeta) =& \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-\zeta} \, dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} \, dz \\ =& \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, dz \right) (\zeta - z_0)^n \\ =& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (\zeta - z_0)^n. \end{aligned}$$

Les autres propriétés découlent immédiatement des propriétés classiques sur les séries entières.

□

Pour plus de détails sur les séries entières à valeurs vectorielles, on pourra consulter [12] mais la théorie est la même que pour les séries entières à valeurs scalaires.

Théorème B.3.6 (Liouville) *Toute fonction f holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$, à valeurs dans E, est constante.*

Preuve : On peut déduire ce résultat du théorème de Liouville pour les fonctions à valeurs scalaires. On peut aussi donner une preuve directe. Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Comme f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, les formules de Cauchy peuvent s'appliquer sur tout cercle γ_r de centre z_0 et de rayon $r > 0$ parcouru une fois dans le sens positif. D'où

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, dz.$$

Notons $M := \|f\|_\infty$. Le théorème B.2.3 implique alors que

$$\|f^{(n)}(z_0)\| \leq \frac{n! \|f\|_\infty}{r^n},$$

et donc, en faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient que $f^{(n)}(z_0) = 0$, pour tout $n \geq 1$. Le théorème B.3.5 permet alors de conclure que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $f(z) = f(z_0)$.

$\square$

Proposition B.3.1 *Soit* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < r\}$, $r > 0$ *et* $f \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega, E)$. *Si* f *est bornée sur* Ω, *alors* f *se prolonge en une unique fonction* $\widetilde{f}$ *holomorphe dans* $D(a, r)$.

Preuve : Considérons $g : D(a,r) \longrightarrow E$ la fonction défnie par

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)f(z) & \text{si } 0 < |z-a| < r \\ 0 & \text{si } z = a. \end{cases}$$

Il est clair que g est holomorphe sur Ω et continue sur $B(a, r)$. Maintenant si $u \in E^*$, alors la fonction scalaire $u \circ g$ a les mêmes propriétés, elle est holomorphe sur Ω et continue sur $D(a,r)$. Il est alors bien connu (c'est une conséquence très simple du théorème de Morera, voir [6] par exemple) que $u \circ g$ est holomorphe sur $D(a, r)$. Ainsi g est faiblement holomorphe sur $D(a,r)$ donc holomorphe. On peut alors appliquer le théorème B.3.5 qui dit que pour $z \in D(a,r)$, on a

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

où la série converge normalement sur tout compact de $D(a,r)$. Comme $g(a) = 0$, on peut alors écrire $g(z) = (z-a)\widetilde{f}(z)$, avec

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a)^n.$$

La théorie des séries entières nous dit alors que $\widetilde{f}$ est holomorphe dans $D(a,r)$ et de plus, on a bien $f(z) = \widetilde{f}(z)$, pour $z \in \Omega$. L'unicité est immédiate (par continuité).

$\square$

Théorème B.3.7 (Principe de prolongement analytique) *Soient* Ω *un ouvert connexe du plan complexe,* E *un sous-ensemble de* Ω *possédant un point d'accumulation dans* Ω*. Si* $f, g \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega, E)$ *et si* $f(z) = g(z)$ *pour* $z \in E$*, alors* $f \equiv g$*.*

Preuve : On déduit ce résultat de l'analogue scalaire. Soit $u \in E^*$. Alors $u \circ f$ et $u \circ g$ sont deux fonctions holomorphes sur Ω, à valeurs scalaires, qui coincident sur un sous-ensemble E. Comme E possède un point d'accumulation dans Ω, alors $u \circ f \equiv u \circ g$. Le corolllaire du théorème de Hahn-Banach (corollaire A.2.2) permet alors de conclure que $f \equiv g$.

$\square$

Bibliographie

[1] J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnaudiès. *Cours de Mathématiques, tome 2 : analyse*. Dunod Université, 1972.

[2] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*. Dunod, 1983.

[3] John B. Conway. *Functions of one complex variable*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1978.

[4] John B. Conway. *A course in operator theory*, volume 21 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[5] Ronald G. Douglas. *Banach algebra techniques in operator theory*. Academic Press, New York, 1972. Pure and Applied Mathematics, Vol. 49.

[6] Carlos Berenstein et Roger Gay. *Complex variables*, volume 125 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. An introduction.

[7] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 2004.

[8] Tsoy-Wo Ma. *Banach-Hilbert spaces, vector measures and group representations*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2002.

[9] Eric Amar et Etienne Matheron. *Analyse complexe*. Cassini, 2004.

[10] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris, 1980. Translated from the first English edition by N. Dhombres and F. Hoffman, Third printing.

[11] Walter Rudin. *Functional analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, second edition, 1991.

[12] Laurent Schwartz. *Analyse. I.* Collection Enseignement des Sciences, Vol. 42. Hermann, Paris, 1991. Théorie des ensembles et topologie., avec la collaboration de K. Zizi.

[13] Alain Yger. *Analyse complexe et distributions.* Collection Mathématiques 2ième. Ellipses, 2001.