Première partie

Prérequis

Chapitre 1

Applications linéaires continues

Théorème 1.0.1 *Soient X et Y deux espaces normés et $T : X \to Y$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *l'application T est continue sur X ;*
2. *l'application T est continue au point 0_X ;*
3. *il existe un nombre $M \geq 0$ tel que, pour tout $x \in X$, on ait :*

$$\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

Preuve : 1. implique 2. est trivial. Pour montrer que 2. implique 3. on écrit explicitement ce que signifie le fait que T soit continue en 0 : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|u - 0\|_X \leq \delta$ implique $\|T(u) - T(0)\|_Y \leq \varepsilon$. Comme T est linéaire, $T(0) = 0$. Pour $\varepsilon = 1$, on obtient l'existence de $\delta > 0$ tel que si $\|u\|_X \leq \delta$, alors $\|T(u)\|_Y \leq 1$. Soit $x \in X$, $x \neq 0$. Alors $\delta x/\|x\|_X$ est un vecteur de norme δ. On a donc $\|T(\delta x/\|x\|_X)\|_Y \leq 1$, ce qui implique par linéarité de T, $\|T(x)\| \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_X$. Ainsi 3. est vérifié avec $M = 1/\delta$ (si $x = 0$, 3. est trivialement vérifié car $T(0) = 0$). Supposons enfin 3. vérifié et considérons $(x_n)_n \subset X$ telle qu'il existe $x \in X$ avec $\|x_n - x\|_X \to 0$. L'application T sera continue si $\|T(x_n) - T(x)\|_Y \to 0$. Or, par linéarité de T, on a :

$$\|T(x_n) - T(x)\|_Y = \|T(x_n - x)\|_Y \leq M\|x_n - x\|_X,$$

ce qui permet de conclure.

□

Corollaire 1.0.1 *Deux normes p et q définissent la même topologie si et seulement si elles sont équivalentes, c'est-à-dire s'il existe deux nombres réels $m > 0$ et $M \geq m$ tels que $mp \leq q \leq Mp$.*

Preuve : On utilise l'équivalence 1. $\Longleftrightarrow$ 3. du théorème 1.0.1 appliquée à $T : x \to x$ de (X, p) dans (X, q), puis de (X, q) dans (X, p).

□

Soient X et Y deux espaces normés et S, T deux applications linéaires continues de X dans Y. Il est clair que l'application $T + S$ est aussi linéaire et continue. En fait l'ensemble des applications linéaires et continues de X dans Y est un **espace vectoriel**, noté $\mathcal{L}(X, Y)$, car c'est un sous-espace vectoriel des applications linéaires de X dans Y.
On appelle aussi **opérateur borné** une application linéaire et continue entre deux espaces normés.

Dans le cas où $Y = X$, on note simplement $\mathcal{L}(X)$ l'espace vectoriel des endomorphismes continus de X.

Soit $T : X \to Y$ une application linéaire et continue. D'après le théorème 1.0.1, il existe une constante $M > 0$ telle que $\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ pour tout $x \in X$. Par conséquent il existe une constante $M > 0$ telle que $\|T(x)\|_Y \leq M$ pour tout $x \in X$ de norme inférieure ou égale à 1. Etant donné que tout ensemble réel majoré admet une borne supérieure, on peut alors considérer la quantité finie suivante :

$$\sup\{\|T(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 1\},$$

que l'on notera $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ ou simplement $\|T\|$ lorsque les notations ne présenteront aucune ambiguïté. La quantité $\|T\|$ s'appelle la **norme opérateur** de l'application linéaire et continue T.

La proposition suivante va justifier l'appellation "norme opérateur".

Proposition 1.0.1 *Soient X et Y deux espaces normés et T une application linéaire et continue. Pour tout $x \in X$ on a*

$$\|T(x)\|_Y \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X.$$

De plus la constante $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ est la plus petite constante M telle que $\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ soit vraie pour tout $x \in X$. Enfin, l'application $T \to \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ est une norme sur $\mathcal{L}(X,Y)$.

Preuve : Si $x \in X$, $x \neq 0$, alors $x/\|x\|_X$ est de norme 1. Par conséquent, $\|T(x/\|x\|_X)\|_Y \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$. On en déduit immédiatement, par linéarité de T, $\|T(x)\| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|x\|_X$. Si $x = 0$, cette inégalité est encore vraie car, T étant linéaire, $T(0) = 0$.

Pour montrer que $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ est la plus petite constante M telle que $\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ soit vraie pour tout $x \in X$, on remarque que si $\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ alors, pour tout $x \neq 0$, $\|T(x/\|x\|_X)\|_Y \leq M$ avec $x/\|x\|_X$ de norme 1. Ainsi $M \geq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$, dès que M vérifie $\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ pour tout $x \in X$.

Vérifions à présent que la norme opérateur est bien une norme. Il est d'abord évident que $\|T\| = 0$ implique $\|T(x)\| = 0$ pour tout $x \in X$, ce qui implique $T(x) = 0_Y$ pour tout $x \in X$. Montrons ensuite que $T \to \|T\|$ est une semi-norme. Il est facile de vérifier que pour tout scalaire λ, $|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|$. De plus, pour tout $x \in X$,

$$\|(S+T)(x)\| = \|S(x) + T(x)\| \leq \|S(x)\| + \|T(x)\| \leq (\|S\| + \|T\|)\|x\|,$$

ce qui implique $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$.

$\square$

La proposition suivante est facile mais importante.

Proposition 1.0.2 *Soient X, Y et Z des espaces normés, $S : X \to Y$ et $T : Y \to Z$ des applications linéaires et continues. On a*

$$\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|.$$

Preuve : Soit $x \in X$. On peut écrire

$$\|(T \circ S)(x)\| = \|T(S(x))\| \leq \|T\|\|S(x)\| \leq \|T\|\|S\|\|x\|,$$

ce qui implique le résulat voulu.

□

Proposition 1.0.3 *Soient X et Y deux espaces normés. Si Y est un espace de Banach, l'espace vectoriel $\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace de Banach.*

Preuve : Soit $(T_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(X, Y)$. Alors pour tout $x \in X$, la suite $(T_n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans X. En effet, $\|T_q(x) - T_p(x)\|_Y \leq \|T_q - T_p\|\|x\|_X$, ce qui prouve immédiatement que $(T_n(x))_n$ est de Cauchy dans Y si $(T_n)_n$ l'est. Comme Y est complet $(T_n(x))_n$ converge vers un vecteur de y que l'on note $T(x)$. L'unicité de la limite implique que l'on définit bien ainsi une application T de X dans Y. De plus T est linéaire car

$$T(x + \lambda y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x + \lambda y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lambda T_n(y) = T(x) + \lambda T(y),$$

grâce à la continuité des applications somme et produit par un scalaire. Comme une suite de Cauchy est toujours bornée, il existe $C > 0$ telle que $\|T_n\| \leq C$. Par conséquent, pour tout $x \in X$ de norme inférieure à 1, on a $\|T_n(x)\| \leq C$, ce qui implique, en prenant la limite lorsque $n \to \infty$, $\|T(x)\| \leq C$ pour tout x de norme inférieure à 1. Finalement, $\|T\| \leq C$, T est continue. Il reste à montrer que $\|T_n - T\| \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit N tel que si $q \geq p \geq N$, $\|T_q - T_p\| \leq \varepsilon$. Par conséquent, pour tout x de norme inférieure à 1, $\|T_q(x) - T_p(x)\| \leq \varepsilon$. En prenant la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient $\|T(x) - T_p(x)\| \leq \varepsilon$ dès que $N \geq p$. Comme ceci est vrai indépendamment du choix de x dans la boule unité de X, on en déduit $\|T - T_p\| \leq \varepsilon$ dès que $N \geq p$.

□

Chapitre 2

Dual topologique d'un espace de Hilbert

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. On notera par $\mathcal{H}^*$ le dual toplogique de $\mathcal{H}$, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{H}$. A tout vecteur $y \in \mathcal{H}$ on associe la forme linéaire ℓ_y définie par

$$\ell_y(x) = \langle x, y \rangle.$$

Lemme 2.0.1 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $y \in \mathcal{H}$. La forme linéaire ℓ_y est continue, i.e. $\ell_y \in \mathcal{H}^*$, et de plus $\|\ell_y\| = \|y\|$.*

Preuve : D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $x \in \mathcal{H}$, $|\ell_y(x)| \leq \|x\|\|y\|$, ce qui prouve que $\|\ell_y\| \leq \|y\|$, prouvant ainsi que ℓ_y est continue. Si $y = 0$ alors ℓ_y est l'application identiquement nulle, de norme 0 et alors $\|\ell_y\| = \|y\|$. Si $y \neq 0$, alors $\ell_y(y/\|y\|) = \|y\|$, ce qui implique que $\|\ell_y\| \geq \|y\|$ et on conclut à l'égalité souhaitée.

$\square$

Théorème 2.0.2 (Théorème de représentation de Riesz) *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. L'application de $\mathcal{H}$ dans le dual topologique $\mathcal{H}^*$ de $\mathcal{H}$ $y \to \ell_y$, avec $\ell_y(x) = \langle x, y \rangle$, est une isométrie anti-linéaire et bijective. En d'autres termes, pour toute forme linéaire continue ℓ sur $\mathcal{H}$, il existe un unique vecteur $y_\ell \in \mathcal{H}^*$ tel que $\ell(x) = \langle x, y_\ell \rangle$.*

Preuve : Il est clair que $\Psi : y \to \ell_y$ est une application anti-linéaire de $\mathcal{H}$ dans son dual topologique. D'après le lemme 2.0.1, c'est aussi une isométrie. Par conséquent elle est aussi injective. En effet $\Psi(y) = \Psi(y')$ implique $\Psi(y - y') = 0$. Comme Ψ est une isométrie cela implique $\|y - y'\| = 0$, i.e. $y = y'$.

Montrons que Ψ est surjective. Soit $\ell \in \mathcal{H}^*$. Si $\ell = 0$, alors $\ell = \Psi(0)$. Si $\ell \neq 0$, notons F son noyau, qui est alors un sous-espace vectoriel fermé différent de $\mathcal{H}$. On peut alors choisir $z \in \mathcal{H}$, $z \notin Y$, tel que $\ell(z) = 1$. On note qu'alors $\ell = \Psi(z/\|z\|^2)$. En effet, tout $x \in \mathcal{H}$ se décompose sous la forme $x = (x - \ell(x)z) + \ell(x)z$. On remarque qu'alors

$$\ell(x - \ell(x)z) = \ell(x) - \ell(x)\ell(z) = \ell(x) - \ell(x) = 0.$$

Par conséquent, $z \perp (x - \ell(x)z)$ et donc

$$\langle x, z\rangle = \langle (x - \ell(x)z) + \ell(x)z, z\rangle = \langle \ell(x)z, z\rangle = \ell(x)\|z\|^2.$$

Finalement, $\langle x, z/\|z\|^2\rangle = \ell(x)$ pour tout $x \in \mathcal{H}$. L'application est donc bien bijective.

$\square$

Chapitre 3

Compacité dans un espace de Banach

3.1 Ensembles compacts et relativement compacts

Rappelons qu'une partie A d'un espace topologique séparé X est dite **relativement compacte** dans X si son adhérence A dans X est compacte. Une partie A d'un espace métrique (X, d) est dite **précompacte** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de A par des parties de diamètre ε. Cela revient à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier N et des points $x_1, \cdots, x_N \in X$ tels que A soit contenu dans la réunion des boules $B(x_i, \varepsilon), i = 1, ..., N$.

Théorème 3.1.1 *Dans un espace métrique complet (X, d), une partie A est relativement compacte si et seulement si elle est précompacte. En particulier, un espace métrique est compact si et seulement s'il est précompact et complet.*

Preuve : Si $\overline{A}$ est compacte dans X, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un ensemble fini $x_1, \cdots, x_N$ de points de A tel que A soit recouvert par les boules $B(x_i, \varepsilon), i = 1, \cdots, N$. En effet, sinon on pourrait pour tout entier $n \geq 1$ trouver un point x_{n+1} de A qui ne soit pas dans $\cup_{1 \leq i \leq n} B(x_i, \varepsilon)$, c'est-à-dire que $d(x_{n+1}, x_i) \geq \varepsilon$ pour tout $i = 1, \cdots, n$; on aurait ainsi en poursuivant ce processus jusqu'à l'infini une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de A telle que $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon$ pour tous $m \neq n$; mais une telle suite n'a évidemment pas de sous-suite de Cauchy, donc pas de sous-suite convergente, ce qui contredit la compacité de $\overline{A}$.

Inversement supposons que A est précompact et soit $(x_n)_n$ une suite de points de A. On va trouver une sous-suite $(x_{n_k})_k$ de Cauchy, donc convergente puisque X est complet. On construit à cet effet une suite décroissante (M_k) de sous-ensembles infinis de $\mathbb{N}$ tels que $d(x_m, x_n) \leq 2^{-k}$ pour tous $m, n \in M_k$; il suffit ensuite d'appliquer le procédé de la sous-suite diagonale pour obtenir une sous-suite de Cauchy. Supposons donc M_k choisi ; puisque A est précompact, il existe un ensemble fini $B \subset X$ tel que tout point x de A vérifie $d(x, y) < 2^{-k-2}$ pour au moins un point $y \in B$. Il en résulte que $\overline{A}$ est contenu dans la réunion finie de boules fermées $\{x \in X : d(x, y) \leq 2^{-k-2}\}$, pour $y \in B$; en particulier l'ensemble infini M_k est recouvert par la famille finie des ensembles $N_y = \{m \in M_k : d(x_m, y) \leq 2^{-k-2}\}$, indexée par les points $y \in B$; il existe donc au moins un $y_0 \in B$ tel que l'ensemble $M_{k+1} = N_{y_0} \subset M_k$ soit infini. Si $m, n \in M_{k+1}$, on aura

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, y_0) + d(y_0, x_n) \leq 2^{-k-1}.$$

$\square$

Notons une conséquence facile : pour qu'une partie A d'un espace métrique complet X soit relativement compacte, il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte K_ε de X telle que tout point de A soit à une distance $< \varepsilon$ de l'ensemble K_ε :

$$\forall x \in A,\ d(x, K_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Dans le cas d'un sous-ensemble A d'un espace de Banach E, il est agréable de retenir un critère qui utilise le caractère vectoriel de l'espace ambiant :

Proposition 3.1.1 *Pour que l'adhérence de A soit compacte dans l'espace de Banach E, il faut et il suffit que A vérifie les deux conditions suivantes :*

a . l'ensemble A est borné ;

b . pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel $L_\varepsilon \subset E$ de dimension finie *tel que tout point de A soit à une distance $< \varepsilon$ de L_ε :*

$$\forall x \in A, dist(x, L_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Preuve : Si l'adhérence de A est compacte il est facile de vérifier que le critère est satisfait : en effet A est borné parce que compact (la fonction continue $x \to \|x\|$ atteint son maximum sur le compact $\overline{A}$) et la deuxième condition est évidemment impliquée par la précompacité : il suffit de prendre l'espace vectoriel L_ε engendré par un ensemble fini F_ε qui approche A à moins de ε.
Dans l'autre direction, supposons les deux conditions du critère vérifiées, et montrons que A est approchable arbitrairement bien par des compacts de E ; soit M une borne pour les normes des éléments de A ; soient $\varepsilon > 0$ et L_ε un sous-espace vectoriel de dimension finie qui approche A à moins de ε. Désignons par K_ε le compact de E formé par les points de L_ε de norme $\leq M + \varepsilon$. Si $x \in A$, il existe $y \in L_\varepsilon$ tel que $\|x - y\| \leq \varepsilon$; puisque $\|x\| \leq M$, on aura $\|y\| \leq M + \varepsilon$, d'où $y \in K$, et le résultat est démontré.

□

Proposition 3.1.2 *Si K_1 et K_2 sont compacts dans l'espace de Banach E, l'ensemble $K_1 + K_2$ est compact ; si A_1 et A_2 sont relativement compacts dans l'espace de Banach E, l'ensemble $A_1 + A_2$ est relativement compact dans E.*

Preuve : Il est clair que $K_1 + K_2$ est borné. Si $L_j, j = 1, 2$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie qui approche K_j à moins de $\varepsilon/2$, il est facile de vérifier que le sous-espace de dimension finie $L_1 + L_2$ approche $K_1 + K_2$ à moins de ε. De plus $K_1 + K_2$ est fermé, donc compact, comme image du compact $K_1 \times K_2$ par l'application continue $(x, y) \to x + y$. La deuxième affirmation résulte facilement de la première, car l'adhérence de la somme $A_1 + A_2$ est contenue dans $\overline{A_1} + \overline{A_2}$.

□

3.2 Théorème d'Ascoli

Définition 3.2.1 *Un ensemble A de fonctions scalaires sur un espace topologique X est dit* ***équicontinu*** *au point $t \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de t dans lequel toutes les fonctions de A sont proches à $\varepsilon > 0$ près de leur valeur au point t,*

$$\forall f \in A, \forall s \in V, |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Lorsque X est un espace métrique compact (K, d), on montre que si A est équicontinu en tout point t de K, alors A est ***uniformément équicontinu****, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute fonction $f \in A$ et tous $s, t \in K$,*

$$(d(s,t) < \varepsilon \Longrightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Théorème 3.2.1 *Soient (K, d) un espace métrique compact et A un sous-ensemble de $C(K)$; l'ensemble A est relativement compact dans $C(K)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *l'ensemble A est borné (pour la norme de $C(K)$) ;*
2. *l'ensemble A est uniformément équicontinu.*