Exercice 8 Une courbe plane $t \mapsto \gamma(t) = r(t)\, e^{i\varphi(t)}$ est définie en coordonnées polaires par la relation $r = r(\varphi)$.

1. Sous quelles conditions une courbe en coordonnées polaires est-elle régulière ?

$\gamma(\varphi) = r(\varphi) e^{i\varphi}$ est régulière $\Leftrightarrow$ $\|\gamma'(\varphi)\| \neq 0$

$$\gamma'(\varphi) = r'(\varphi) e^{i\varphi} + i\, r(\varphi) e^{i\varphi} = \left(r'(\varphi) + i\, r(\varphi)\right) e^{i\varphi}$$

$$\|\gamma'(\varphi)\| = \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2} = 0 \iff \begin{cases} r'(\varphi) = 0 \\ r(\varphi) = 0 \end{cases}$$

Donc $\gamma(\varphi) = r(\varphi)\, e^{i\varphi}$ est régulière au point $\gamma(\varphi)$ si $r(\varphi) \neq 0$, i.e. la courbe ne passe pas par l'origine du repère, ou bien si $r(\varphi) = 0$ et $r'(\varphi) \neq 0$, i.e. la courbe passe par l'origine mais n'y reste pas.

2. Montrer qu'une courbe plane γ admet des coordonnées polaires si et seulement si le vecteur vélocité γ' n'est jamais proportionnel au vecteur position γ.

Une courbe plane $t \mapsto \gamma(t) = r(t)\, e^{i\varphi(t)}$ peut s'écrire comme $\varphi \mapsto \gamma(\varphi) = r(\varphi)\, e^{i\varphi}$ ssi la fonction $t \mapsto \varphi(t)$ admet la réciproque $\varphi \mapsto t(\varphi)$, car dans ce cas on pose $r(\varphi) := r(t(\varphi))$ et $\gamma(\varphi) := \gamma(t(\varphi))$.

La fonction $t \mapsto \varphi(t)$ admet la réciproque ssi elle est strictement monotone, i.e. si $\varphi'(t) \neq 0$ $\forall t$.

Montrons que cette condition est équivalente à dire que $\gamma' \not\parallel \gamma$:

$$\gamma(t) = r(t)\, e^{i\varphi(t)} \Rightarrow \gamma'(t) = r'(t) e^{i\varphi(t)} + i\, r(t)\varphi'(t)\, e^{i\varphi(t)}$$

$$= \underbrace{r'(t)\, e^{i\varphi(t)}}_{\substack{\text{vecteur proportionnel} \\ \text{à } \gamma(t) = r(t)\, e^{i\varphi(t)}}} + \underbrace{r(t)\,\varphi'(t)\, e^{i(\varphi(t) + \pi/2)}}_{\substack{\text{vecteur orthogonale à} \\ \gamma(t) = r(t)\, e^{i\varphi(t)}}}$$

Alors $\varphi'(t) \neq 0$ $\forall t$ $\iff$ le vecteur $\gamma'(t)$ a une composante non nulle en tout t orthogonale à $\gamma(t)$ $\iff$ $\gamma'(t) \not\parallel \gamma(t)$.

3. Calculer la longueur d'arc et la courbure en coordonnées polaires.

$$s(\varphi) = s(\varphi_0) \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} \|\gamma'(u)\|\, du = s(\varphi_0) \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r'(u)^2 + r(u)^2}\, du.$$

$$k(\varphi) = \frac{\|\gamma'(\varphi) \wedge \gamma''(\varphi)\|}{\|\gamma'(\varphi)\|^3}, \text{ où :}$$

$$\gamma'(\varphi) = \left(r'(\varphi) + i\, r(\varphi)\right) e^{i\varphi} = r'(\varphi)\, e^{i\varphi} + r(\varphi)\, e^{i(\varphi + \pi/2)}$$

$$\gamma''(\varphi) = \left(r''(\varphi) + i\, r'(\varphi)\right) e^{i\varphi} + i\left(r'(\varphi) + i\, r(\varphi)\right) e^{i\varphi} = \left(r''(\varphi) - r(\varphi) + i\, 2 r'(\varphi)\right) e^{i\varphi}$$

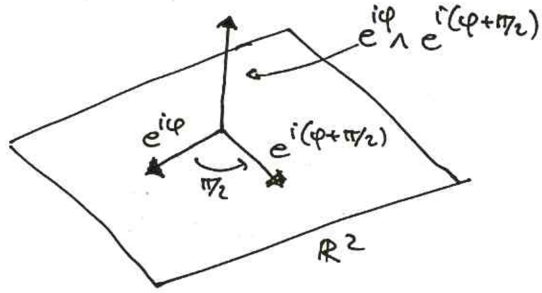
$$= \left(r''(\varphi) - r(\varphi)\right) e^{i\varphi} + 2 r'(\varphi)\, e^{i(\varphi + \pi/2)}.$$

2) Alors :

$$\gamma'(\varphi) \wedge \gamma''(\varphi) = r'(\varphi)\big(r''(\varphi) - r(\varphi)\big)\, e^{i\varphi} \wedge e^{i\varphi} + 2\, r'(\varphi)^2\, e^{i\varphi} \wedge e^{i(\varphi+\pi/2)}$$
$$+ r(\varphi)\big(r''(\varphi) - r(\varphi)\big)\, e^{i(\varphi+\pi/2)} \wedge e^{i\varphi} + 2 r(\varphi) r'(\varphi)\, e^{i(\varphi+\pi/2)} \wedge e^{i(\varphi+\pi/2)}$$

où $e^{i\varphi} \wedge e^{i\varphi} = \vec{0}$, $e^{i(\varphi+\pi/2)} \wedge e^{i(\varphi+\pi/2)} = \vec{0}$,

$$e^{i(\varphi+\pi/2)} \wedge e^{i\varphi} = - e^{i\varphi} \wedge e^{i(\varphi+\pi/2)}$$



et $e^{i\varphi} \wedge e^{i(\varphi+\pi/2)}$ est un vecteur normal au plan de la courbe et de norme 1.

Donc $\|\gamma'(\varphi) \wedge \gamma''(\varphi)\| = \big| 2\, r'(\varphi)^2 - r(\varphi)\big(r''(\varphi) - r(\varphi)\big) \big| \cdot \| e^{i\varphi} \wedge e^{i(\varphi+\pi/2)} \|$

et $$k_\gamma(\varphi) = \frac{\|\gamma'(\varphi) \wedge \gamma''(\varphi)\|}{\|\gamma'(\varphi)\|^3} = \frac{\big| 2\, r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2 - r(\varphi) r''(\varphi) \big|}{\big(r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2\big)^{3/2}} .$$

4. Écrire une paramétrisation en coordonnées polaires de la spirale logarithmique.

Spirale log. : $\gamma(t) = e^{at}\, e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

On veut : $\begin{cases} \varphi(t) = t \\ r(t) = e^{at} \end{cases} \Longrightarrow t(\varphi) = \varphi \searrow r(\varphi) = e^{a\varphi} \Longrightarrow \gamma(\varphi) = e^{a\varphi}\, e^{i\varphi}$.

Donc cette spirale log. est déjà écrite en coordonnées polaires !

5. Écrire une param. en coord. polaires de la droite cartesienne $ax + by + c = 0$.

On veut $(x, y) = \gamma(\varphi) = r(\varphi)\, e^{i\varphi} = \big(r(\varphi)\cos\varphi,\ r(\varphi)\sin\varphi\big)$, donc on pose

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \in \text{droite} \iff a\, r(\varphi)\cos\varphi + b\, r(\varphi)\sin\varphi + c = 0$$
$$\iff r(\varphi)\big[a\cos\varphi + b\sin\varphi\big] + c = 0$$

$\iff r(\varphi) = -\dfrac{c}{a\cos\varphi + b\sin\varphi}$. Donc droite $= \left\{ \gamma(\varphi) = \dfrac{-c}{a\cos\varphi + b\sin\varphi}\, e^{i\varphi},\ \varphi \in \mathbb{R} \right\}$.

6. Écrire une param. en coord. polaires de la courbe cuspidale $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t > 0$.

On a $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$, $t > 0$ et on veut $\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$, donc $\begin{cases} r(\varphi)\cos\varphi = t^2 \\ r(\varphi)\sin\varphi = t^3 \end{cases}$, $t > 0$

$$t > 0 \Longrightarrow \left.\begin{cases} t^2 > 0 \text{ avec } t^2 = r(\varphi)\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi > 0 \Rightarrow \varphi \in \,]-\pi/2, \pi/2[\\ t^3 > 0 \text{ avec } t^3 = r(\varphi)\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi > 0 \Rightarrow \varphi \in \,]0, \pi[\end{cases}\right\} \Rightarrow \varphi \in \,]0, \pi/2[.$$

$$r(\varphi)^3\cos^3\varphi = t^6 = r(\varphi)^2\sin^2\varphi \Longrightarrow r(\varphi) = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi} .$$

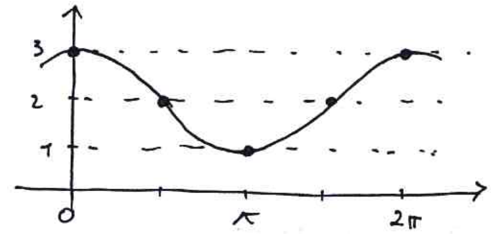
Donc la courbe cuspidale s'écrit $\gamma(\varphi) = \dfrac{\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi}\, e^{i\varphi}$, $\varphi \in \,]0, \pi/2[$.

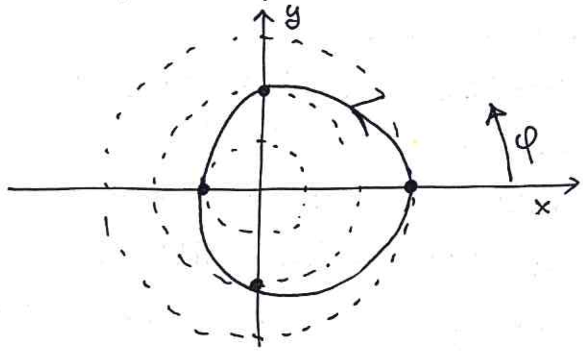
Suite exercice 8

7. Dessiner la courbe $r(\varphi) = \cos(n\varphi) + 2$ pour $n = 1, 2, 3$.

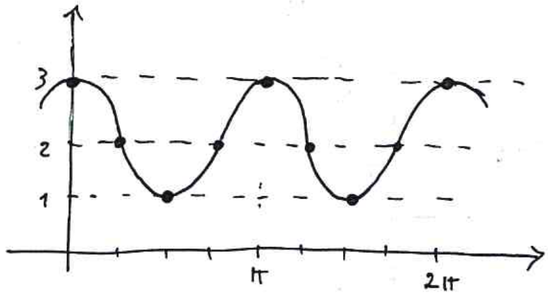
Pour dessiner une courbe en coord. polaires, on dessine d'abord le graphe de la fonction $\varphi \longmapsto r(\varphi)$ pour $\varphi \in [0, 2\pi]$ et ensuite on enroule ce graphe autour de l'origine de $\mathbb{R}^2$.

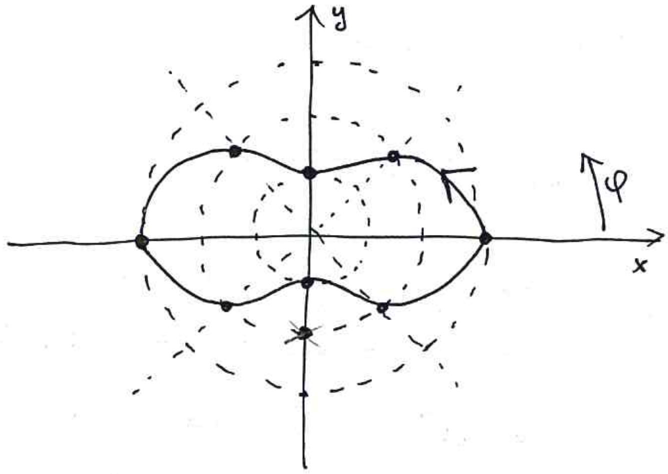
$\boxed{n=1}$ $\quad r(\varphi) = \cos\varphi + 2 \quad \Longrightarrow \quad \gamma(\varphi) = (\cos\varphi + 2)\, e^{i\varphi}$



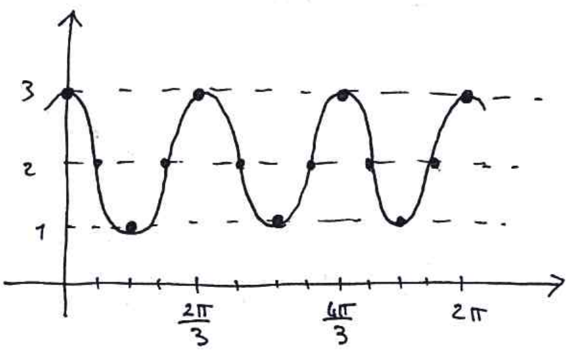


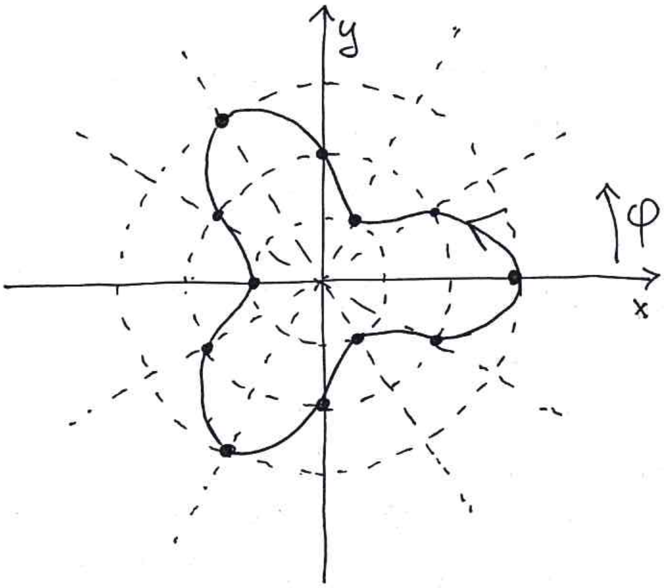
$\boxed{n=2}$ $\quad r(\varphi) = \cos(2\varphi) + 2 \quad \Longrightarrow \quad \gamma(\varphi) = (\cos(2\varphi) + 2)\, e^{i\varphi}$





$\boxed{n=3}$ $\quad r(\varphi) = \cos(3\varphi) + 2 \quad \Longrightarrow \quad \gamma(\varphi) = (\cos(3\varphi) + 2)\, e^{i\varphi}$

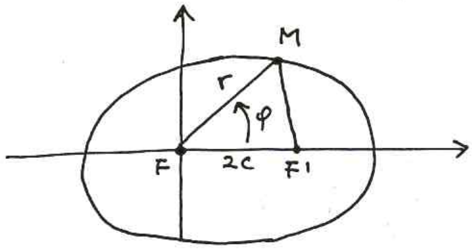




8. Étudier les courbes définies par $r(\varphi) = \dfrac{p}{1-e\cos\varphi}$ où $p, e > 0$.

Montrons que la courbe $\gamma(\varphi) = \dfrac{p}{1-e\cos\varphi}\, e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ est une conique.

$\boxed{0<e<1}$ γ est une ellipse d'eccentricité e



Preuve :

$$\text{Ellipse} = \left\{ M \text{ t.q. } \|\vec{FM}\| + \|\vec{F'M}\| = 2a \text{ et } \|\vec{FF'}\| = 2c \right\}$$

avec $0<c<a$

$F=(0,0)$, $F'=(2c,0)$, $M=(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$\vec{FM} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ $\quad \|\vec{FM}\| = r$ $\quad$ où $r = r(\varphi)$

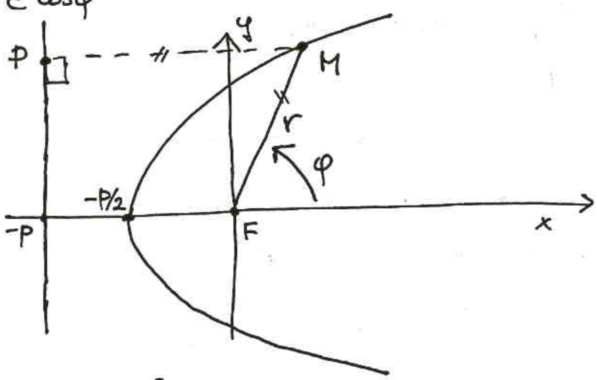
$\vec{F'M} = \vec{F'F} + \vec{FM} = \vec{FM} - \vec{FF'} = (r\cos\varphi - 2c, r\sin\varphi)$

$M \in$ ellipse $\Leftrightarrow \|\vec{F'M}\|^2 = (2a - \|\vec{FM}\|)^2 \Leftrightarrow (r\cos\varphi - 2c)^2 + r^2\sin^2\varphi = (2a-r)^2 \Leftrightarrow$

$\cancel{r^2\cos^2\varphi} - 4cr\cos\varphi + 4c^2 + \cancel{r^2\sin^2\varphi} = 4a^2 - 4ar + \cancel{r^2} \Leftrightarrow \cancel{4}(a - c\cos\varphi)r = \cancel{4}(a^2-c^2)$

$$\Leftrightarrow r(\varphi) = \frac{a^2-c^2}{a - c\cos\varphi} = \frac{a^2-c^2}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{c}{a}\cos\varphi} = \frac{p}{1-e\cos\varphi} \quad \text{avec } p = \frac{a^2-c^2}{a} > 0 \text{ et } e = \frac{c}{a} < 1.$$

$\boxed{e=1}$ γ est une parabole



Preuve :

$$\text{Parabole} = \left\{ M \text{ t.q. } \|\vec{PM}\| = \|\vec{FM}\| \right\}$$

où $P \in$ droite d'équation $x = -p$

$F=(0,0)$, $M=(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $P=(-p, r\sin\varphi)$

$\|\vec{FM}\| = r$, $\quad \vec{PM} = (p + r\cos\varphi, 0) \Rightarrow \|\vec{PM}\|^2 = (r\cos\varphi + p)^2$

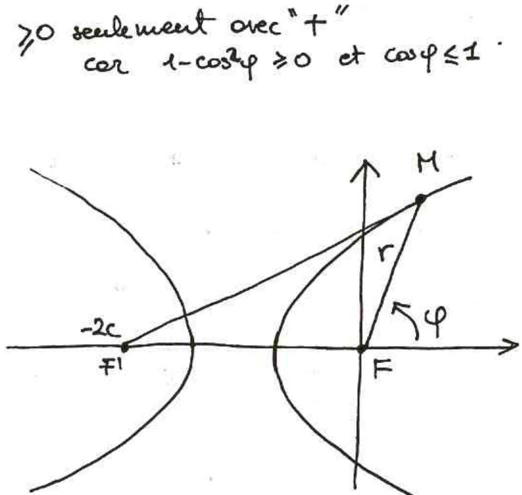
$M \in$ parabole $\Leftrightarrow \|\vec{PM}\|^2 = \|\vec{FM}\|^2 \Leftrightarrow (r\cos\varphi + p)^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2\cos^2\varphi + 2pr\cos\varphi + p^2 = r^2$

$\Leftrightarrow r^2(1-\cos^2\varphi) - 2p\cos\varphi\, r - p^2 = 0$

$$\Leftrightarrow r = \frac{p\cos\varphi \pm \sqrt{p^2\cos^2\varphi + p^2(1-\cos^2\varphi)}}{1-\cos^2\varphi} = \frac{p\cos\varphi \pm p}{1-\cos^2\varphi} \geq 0 \text{ seulement avec "+" car } 1-\cos^2\varphi \geq 0 \text{ et } \cos\varphi \leq 1.$$

Donc $r(\varphi) = \dfrac{p\cos\varphi + p}{(1+\cos\varphi)(1-\cos\varphi)} = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$.

$\boxed{e>1}$ γ est une hyperbole d'eccentricité e



Preuve :

$$\text{Hyperbole} = \left\{ M \text{ t.q. } \|\vec{F'M}\| - \|\vec{FM}\| = 2a \text{ et } \|\vec{FF'}\| = 2c \right\}$$

avec $0<a<c$

$F=(0,0)$, $F'=(-2c,0)$, $M=(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$\vec{FM} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ $\quad \|\vec{FM}\| = r$

$\vec{F'M} = \vec{F'F} + \vec{FM} = \vec{FM} - \vec{FF'} = (r\cos\varphi - (-2c), r\sin\varphi)$

$M \in$ hyperbole $\Leftrightarrow \|\vec{F'M}\|^2 = (2a + \|\vec{FM}\|)^2 \Leftrightarrow (r\cos\varphi + 2c)^2 + r^2\sin^2\varphi = (2a+r)^2 \Leftrightarrow$

$\cancel{r^2\cos^2\varphi} + 4cr\cos\varphi + 4c^2 + \cancel{r^2\sin^2\varphi} = 4a^2 + 4ar + \cancel{r^2} \Leftrightarrow \cancel{4}(a - c\cos\varphi)r = \cancel{4}(c^2-a^2)$

$$\Leftrightarrow r(\varphi) = \frac{c^2-a^2}{a - c\cos\varphi} = \frac{c^2-a^2}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{c}{a}\cos\varphi} = \frac{p}{1-e\cos\varphi} \quad \text{avec } p = \frac{c^2-a^2}{a} > 0 \text{ et } e = \frac{c}{a} > 1.$$