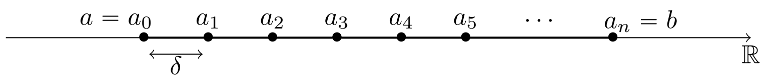
3 Intégrales multiples, curvilignes et de surface

3.1 Intégrale de Riemann des fonctions d'une variable

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle fermé et borné (compact) $[a, b]$.

Définition. Une **subdivision** de $[a, b]$ est une partition de l'intervalle $I = [a, b]$ en n intervalles $I_i = [a_{i-1}, a_i]$ (pour $i = 1, ..., n$) de longueur $\delta = \dfrac{b-a}{n}$, avec $a_0 = a$ et $a_n = b$:

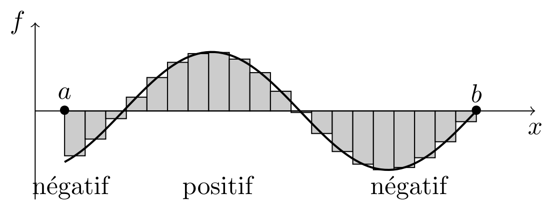


On peut identifier la subdivision avec l'ensemble

$$\sigma_n = \Big\{ a_0, a_1, \ldots, a_n \mid a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b,\ a_i - a_{i-1} = \delta = \frac{b-a}{n} \Big\}.$$

Définition. Soit σ_n une subdivision fixée de l'intervalle $[a, b]$. Pour tout choix de n points $x_i \in I_i$ $(i = 1, ..., n)$, on appelle **somme de Riemann de** f associée à la subdivision σ_n et aux points $\{x_i\}$ la somme

$$R_n(f; \{x_i\}) := \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,(a_i - a_{i-1})$$



où chaque terme $f(x_i)\,\delta$ représente l'**aire algébrique** du rectangle de base I_i et hauteur $f(x_i)$. Ici, "algébrique" signifie avec un signe $\pm$ qui dépend du signe de $f(x_i)$.

Définition. On dit que la fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est **intégrable sur** $[a, b]$ **selon Riemann** si, en faisant varier la subdivision σ_n de $[a, b]$ et les points $x_i \in I_i$, il existe la limite

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f; \{x_i\}),$$

elle est finie, et elle ne dépend pas du choix des points $x_i \in I_i$. . Dans ce cas, on appelle **intégrale de Riemann de** f **sur** $[a, b]$ cette limite:

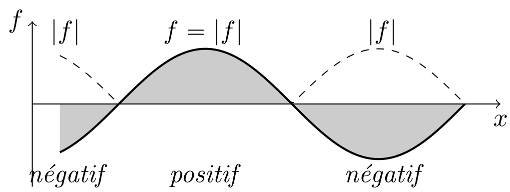
$$\int_a^b f(x)\ dx := \lim_{n\to\infty} R_n(f; \{x_i\}).$$

On pose aussi, pour $a < b$: $\displaystyle\int_b^a f(x)\ dx := -\int_a^b f(x)\ dx.$

Proposition. **[Signification géométrique de l'intégrale simple.]** *Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Alors:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \textit{aire "algébrique" sous le graphe de } f.$$

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \textit{aire sous le graphe de } f.$$



Preuve. Évident, d'après la définition. $\square$

Remarque. La condition que la limite $\lim_{n\to\infty} R_n(f;\{x_i\})$ soit indépendente du choix des points $x_i \in I_i$ est essentielle pour obtenir une notion d'intégrale qui donne l'aire sous le graphe de f.

Par exemple, la **fonction de Dirichlet**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

a un graphe complètement discontinu, qui alterne des valeurs 0 et 1: on ne veut pas que son intégrale sur $[0,1]$ soit défini et c'est ce qu'on obtient avec cette condition. En effet, pour tout n fixé, la subdivision σ_n de $[0,1]$ est

$$\sigma_n = \left\{ 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{i}{n} < \cdots \frac{n-1}{n} < 1 \right\},$$

et on a le choix des points $x_i \in I_i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, pour tout $i = 1, 2, ..., n$. Si on choisit $x_i = \frac{i}{n} \in \mathbb{Q}$, on a $f(x_i) = 1$, donc

$$R_n(f;\{x_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1,$$

et $\lim_{n\to\infty} R_n(f;\{x_i\}) = 1$. Si on choisit $y_i = \frac{i - \sqrt{1/2}}{n} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, qui est bien dans l'intervalle I_i car $i - 1 < i - \sqrt{1/2} < i$, on a $f(y_i) = 0$, donc

$$R_n(f;\{y_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0,$$

et $\lim_{n\to\infty} R_n(f;\{y_i\}) = 0$. En conclusion, la fonction de Dirichlet n'est donc pas intégrable selon Riemann.

Proposition. **[Propriétés de l'intégrale de Riemann.]**

1. *Si $f(x) = 1$ pour tout $x \in [a,b]$, on a* $\int_a^b dx = b - a$ *(longueur de $[a,b]$).*

   Si $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$, on a $\int_a^b 0\ dx = 0$.

2. *Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$, alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et on a*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx.$$

3. *Si f et g sont intégrables et $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors on a*

$$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b g(x)\, dx.$$

4. Si f est intégrable sur $[a,b]$, on a

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

5. Si $a < b < c$ et f est intégrable sur $[a,c]$, on a

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Preuve. Évident, d'après la définition. □

Existence de l'intégrale de Riemann.

Proposition. **[Condition nécéssaire pour l'intégrabilité.]** *Si f est intégrable selon Riemann alors f est bornée.*

Preuve. Par l'absurde, supposons que f ne soit pas bornée sur $[a,b]$. Alors pour tout $M > 0$ fixé, il existe un $x \in [a,b]$ tel que $|\,f(x)\,| > M$. Supposons que $x \in [a_{j-1}, a_j]$, dans n'importe quelle subdivision de $[a,b]$. Choisissons un point x_i dans chaque autre intervalle $[a_{i-1}, a_i]$, avec $i \neq j$. Puisque f est intégrable, pour tout choix de $x_j \in [a_{j-1}, a_j]$, la somme de Riemann

$$R_n(f, \{x_k\}) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} f(x_i)\,(a_i - a_{i-1}) + f(x_j)\,(a_j - a_{j-1})$$

converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ pour $n \to \infty$. Or, pour le $M > 0$ fixé au début, on peut trouver x_j tel que

$$|f(x_j)| \geqslant \frac{\left|\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} f(x_i)\,(a_i - a_{i-1})\right| + M}{a_j - a_{j-1}}.$$

On a alors:

$$\left|\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} f(x_i)\,(a_i - a_{i-1}) + f(x_j)\,(a_j - a_{j-1})\right| \geqslant |f(x_j)|\,(a_j - a_{j-1}) - \left|\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} f(x_i)\,(a_i - a_{i-1})\right| \geqslant M,$$

c'est-à-dire que la somme de Riemann choisie n'est pas bornée, et donc ne peut converger pour $n \to \infty$. □

Remarque. La condition "f bornée" est nécéssaire mais elle n'est pas suffisante. Par exemple, la fonction de Dirichlet est bornée (entre 0 et 1) mais elle n'est pas intégrable sur $[0,1]$.

Cherchons des conditions suffisantes pour l'intégrabilité. Soit donc $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée.

Définition. Pour une subdivision $\sigma_n = \{a_0 < a_1 < \cdots < a_n\}$ fixée de $[a,b]$, on appelle **sommes de Darboux** les sommes

$$s_n(f) := \sum_{i=1}^{n} m_i\,(a_i - a_{i-1}), \qquad \text{où} \quad m_i := \inf_{[a_{i-1},a_i]} f,$$
$$S_n(f) := \sum_{i=1}^{n} M_i\,(a_i - a_{i-1}), \qquad \text{où} \quad M_i := \sup_{[a_{i-1},a_i]} f.$$

Vu que pour tout $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$ on a $m_i \leqslant f(x_i) \leqslant M_i$, il est évident qu'on a $\quad s_n(f) \leqslant R_n(f) \leqslant S_n(f)$.

Théorème. [**Condition nécéssaire et suffisante pour l'intégrabilité.**] *Une fonction f est intégrable sur $[a,b]$ selon Riemann si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} \big(S_n(f) - s_n(f)\big) = 0.$$

Dans ce cas, on a évidemment $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n(f) = \lim_{n\to\infty} s_n(f).$

Preuve.

$\Longrightarrow$ Supposons qu'il existe la limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{I}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|\, R_n(f) - \mathcal{I}\,| < \varepsilon/4$ pour tout $n \geqslant N$. Dans la somme de Riemann $R_n(f)$ on peut choisir les points x_i comme on veut: choisissons des x_i tels que $|\, M_i - f(x_i)| < \dfrac{\varepsilon/4}{b-a}$ pour construire la somme $R'_n(f)$, et choisissons des y_i tels que $|\, m_i - f(y_i)| < \dfrac{\varepsilon/4}{b-a}$ pour construire la somme $R''_n(f)$. On a alors

$$|\, S_n(f) - R'_n(f)\,| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\, M_i - f(x_i)|\, \frac{b-a}{n} < \varepsilon/4$$

et de même $|\, s_n(f) - R''_n(f)\,| < \varepsilon/4$, donc

$|\, S_n(f) - s_n(f)\,| \leqslant |\, S_n(f) - R'_n(f)\,|+|\, R'_n(f) - \mathcal{I}\,|+|\,\mathcal{I} - R''_n(f)\,|+|\, s_n(f) - R''_n(f)\,| \leqslant 4\,\varepsilon/4 = \varepsilon.$

$\Longleftarrow$ Supposons que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n(f) = \lim_{n\to\infty} s_n(f)$. Puisque la suite $\big(S_n(f)\big)_n$ est minorée par une somme $s_m(f)$ quelconque, et la suite $\big(s_n(f)\big)_n$ est majorée par une somme $S_m(f)$ quelconque, il existe forcement les deux bornes

$$\mathcal{I}^+ := \inf\{S_n(f) \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{I}^- := \sup\{s_n(f) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a alors $s_n \leqslant \mathcal{I}^- \leqslant \mathcal{I}^+ \leqslant S_n$, donc $0 \leqslant \mathcal{I}^+ - \mathcal{I}^- \leqslant S_n(f) - s_n(f)$. Or, pout tout $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a $|\, S_n(f) - s_n(f)\,| < \varepsilon/3$, donc aussi $\mathcal{I}^+ - \mathcal{I}^- < \varepsilon/3$. Mais la condition $\mathcal{I}^+ - \mathcal{I}^- < \varepsilon/3$ pour tout $\varepsilon > 0$ signifie que $\mathcal{I}^+ = \mathcal{I}^- = \mathcal{I}$. Pour toute subdivision on a $s_n \leqslant R_n(f) \leqslant S_n$, donc

$$|\, R_n(f) - \mathcal{I}\,| \leqslant |\, R_n(f) - S_n(f)\,| + |\, S_n(f) - s_n(f)\,| + |\, s_n(f) - \mathcal{I}\,| \leqslant 3\,\varepsilon/3 = \varepsilon,$$

i.e. $R_n(f) \longrightarrow \mathcal{I}$.

$\square$

Théorème. **[Conditions suffisantes pour l'intégrabilité.]** *Une fonction f définie sur un intervalle fermé $[a, b]$ est intégrable selon Riemann si elle vérifie une des hypothèses suivantes:*

1. *f est continue sur $[a, b]$ (et donc bornée par le théorème de Weierstrass).*
2. *f est bornée sur $[a, b]$ et elle a un nombre fini de discontinuités, ou bien l'ensemble de ses discontinuités est non dénombrable mais a mesure nulle.*
3. *f est la limite uniforme $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ d'une suite (f_k) de fonctions intégrables sur $[a, b]$. Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)\,dx$.*

Remarque.

- Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est *dénombrable* s'il a la même cardinalité des nombres naturels $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il y a une bijection $E \to \mathbb{N}$. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ *non dénombrable* est en bijection avec $\mathbb{R}$ même. (À noter que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.)
- La *mesure* d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$, notée $\mu(E)$, est définie de façon abstraite, mais pour ce qui nous concerne on peut prendre l'intégrale sur E (qui donne la *mesure de Lebesgue*):
$$\mu(E) = \int_E dx.$$
Les ensembles dénombrables ont mesure nulle. Le contraire est faux, par exemple l'*ensemble de Cantor* (un peu long à décrire) est non dénombrable et de mesure nulle.

Nous montrons le cas qui nous interesse le plus: si f est continue alors f est intégrable.

Lemme. *Si f est continue, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $\sigma_n = \{a_0 < a_1 < \cdots < a_n\}$ est une subdivision de $[a, b]$ telle que $a_i - a_{i-1} < \delta$ pour tout i, alors on a*
$$\omega_i := M_i - m_i < \varepsilon \qquad \textit{pour tout } i = 1, ..., n,$$
où $M_i = \sup_{I_i} f$ et $m_i = \inf_{I_i} f$.

Preuve. Si f est continue sur un compact $[a, b]$, par le théorème de Heine elle est uniformement continue: pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|\, f(y') - f(y'')\,| < \varepsilon$ pour tout y' et y'' tels que $|\, y' - y''\,| < \delta$.

Soit σ_n une subdivision telle que $a_i - a_{i-1} < \delta$ pour tout i (i.e. $n > \frac{b-a}{\delta}$), et soient $y_i', y_i'' \in [a_{i-1}, a_i]$ tels que $m_i = f(y_i')$ et $M_i = f(y_i'')$ (le minimum et le maximum existent sur des intervalles fermés pour une fonction continue en vertue du théorème de Weierstrass). Alors on a $\omega_i := M_i - m_i = f(y_i'') - f(y_i') < \varepsilon$ car $|\, y' - y''\,| < a_i - a_{i-1} < \delta$. □

Preuve. Montrons que si f est continue alors f est Riemann-intégrable. Fixons $\varepsilon > 0$. Pour $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a}$, il existe un $\delta' > 0$ tel que, pour une subdivision σ_n avec $n > \frac{b-a}{\delta'}$ on a $\omega_i = M_i - m_i < \varepsilon'$. Alors la condition
$$|\, S_n(f) - s_n(f)\,| = S_n(f) - s_n(f) = \sum_{i=1}^n \omega_i\,(a_i - a_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} = \varepsilon$$
est vérifiée pour tout $n > \frac{b-a}{\delta'}$. □

Calcul d'intégrales.

Théorème. **[Théorème de la valeur moyenne.]** *Si f est continue sur $[a,b]$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(c)\,(b-a).$$

Preuve. Par le théorème de Weierstrass, si f est continue sur $[a,b]$, alors il existe

$$m = \min_{[a,b]} f \leqslant f(x) \leqslant \max_{[a,b]} f = M, \qquad \text{pour tout } x \in [a,b].$$

Donc

$$m\,(b-a) = \int_a^b m\ dx \leqslant \int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b M\ dx = M\,(b-a),$$

c'est-à-dire

$$m \leqslant \mu := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx \leqslant M.$$

Donc $\mu \in f\big([a,b]\big)$. Par le théorème des valeurs intérmédiaires, alors, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \mu$. $\square$

Théorème. **[Théorème fondamental du calcul intégral. (Newton-Leibniz)]** *Si la fonction f est intégrable sur $[a,b]$ selon Riemann, alors elle admet une primitive F sur $[a,b]$, et on a:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt + d \qquad \textit{pour tout } x \in [a,b] \textit{ et } d \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, on a aussi: $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$

Preuve. Posons $\Phi(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}$ on a

$$\Phi(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\ dt = \int_a^x f(t)\ dt + \int_x^{x+h} f(t)\ dt = \Phi(x) + \int_x^{x+h} f(t)\ dt,$$

donc

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} f(t)\ dt = f(c)\,h$$

pour un certain $c \in [x, x+h]$. On a alors

$$\Phi'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x),$$

donc Φ est une primitive de f. Puisque $F - \Phi$ est constant, F est aussi une primitive de f. $\square$

Théorème. **[Théorème du changement de variables.]** *Si la fonction f est intégrable sur $[a,b]$ et $\varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$, $t \mapsto \varphi(t) = x$ est un C^1-difféomorphisme, on a*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt.$$

Preuve. On a $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a,b]$, c'est-à-dire que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. Soit $G : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ la composée $G = F \circ \varphi$. Alors on a

$$G'(t) = F'\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t),$$

donc

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt &= \int_\alpha^\beta G'(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)\\ &= F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx.\end{aligned}$$

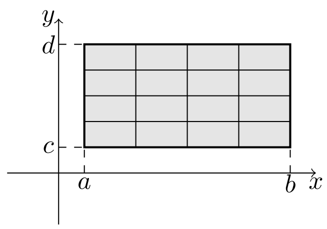
□

3.2 Intégrales doubles

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables (x,y) définie sur un ensemble fermé et borné (compact) $D \subset \mathbb{R}^2$. Supposons que le bord ∂D soit une courbe C^1 par morceaux, par exemple un polygône ou l'union de graphes $y = y(x)$ ou $x = x(y)$.

Cas où D est un rectangle.

Supposons que $D = [a,b] \times [c,d]$ soit un rectangle.

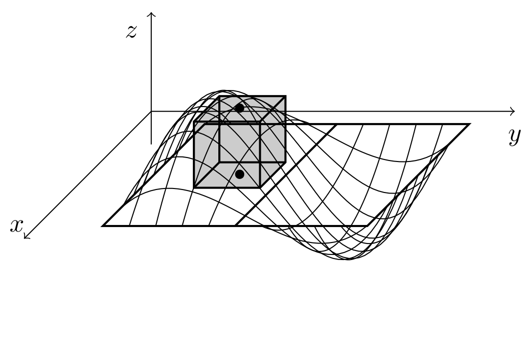


Définition. Une **subdivision** de $D = [a,b] \times [c,d]$ est un ensemble σ_{nm} de nm rectangles $I_i \times J_j$ de taille $\frac{b-a}{n}\,\frac{d-c}{m}$ qui recouvrent D, où $\{I_i\}$ est une partition de $I = [a,b]$ et $\{J_i\}$ est une partition de $J = [c,d]$.

Définition. Soit $\sigma_{nm} = \{I_i \times I_j\}$ une subdivision fixée de $D = I \times J$. Pour tout choix de points $(x_i, y_j) \in I_i \times J_j$, on appelle **somme de Riemann de** f associée à la subdivision σ_{nm} et aux points $\{(x_i,y_j)\}$ la somme

$$R_{nm}(f, \{(x_i,y_j)\}) = \sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} f(x_i,y_j)\ \frac{(b-a)(d-c)}{nm}$$

où chaque terme $f(x_i,y_j)\ \frac{(b-a)(d-c)}{nm}$ représente le **volume algébrique** du parallélepipède de base $I_i \times J_j$ et hauteur $f(x_i,y_j)$, avec signe $\pm$ qui dépend du signe de $f(x_i,y_j)$.



Définition. On dit que la fonction $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ est **intégrable selon Riemann** si, en faisant varier la subdivision σ_{nm} de $I \times J$ et les points $(x_i, y_i) \in I_i \times J_j$, il existe la limite

$$\lim_{n,m\to\infty} R_{nm}(f; \{(x_i, y_j)\}),$$

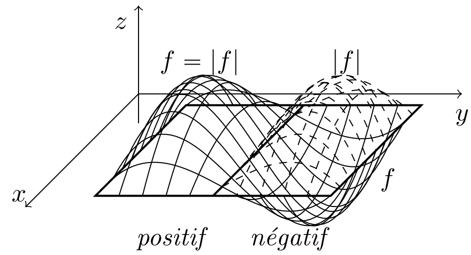
elle est finie et ne dépend pas du choix des points $(x_i, y_i) \in I_i \times J_j$. Dans ce cas, on appelle **intégrale double de f sur $I \times J$** cette limite:

$$\iint_{I\times J} f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{n,m\to\infty} R_{nm}(f; \{(x_i, y_j)\}).$$

Proposition. **[Signification géométrique de l'intégrale double.]**

$$\iint_D f(x, y)\ dx\ dy = \textit{volume "algébrique" sous le graphe de } f$$

$$\iint_D |f(x, y)|\ dx\ dy = \textit{volume sous le graphe de } f.$$



Preuve. Évident, d'après la définition. □

Proposition. **[Propriétés des intégrales doubles.]**

1. *Si $f(x, y) = 1$ pour tout $(x, y) \in D$, on a* $\displaystyle\iint_D dx\, dy = \mathrm{Aire}(D)$ *(aire du rectangle D).*

   Si $f(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in D$, on a $\displaystyle\iint_D dx\, dy = 0.$

2. *Si f et g sont intégrables sur D, alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et on a*

$$\iint_D \big(\lambda\ f(x, y) + \mu\ g(x, y)\big)\ dx\ dy = \lambda \iint_D f(x, y)\ dx\ dy + \mu \iint_D g(x, y)\ dx\ dy.$$

3. *Si f et g sont intégrables et $f(x, y) \leqslant g(x, y)$ pour tout $(x, y) \in D$, alors on a*

$$\iint_D f(x, y)\ dx\ dy \leqslant \iint_D g(x, y)\ dx\ dy.$$

4. *Si f est intégrable sur D, on a*

$$\left| \iint_D f(x, y)\, dx\, dy \right| \leqslant \iint_D |f(x, y)|\ dx\, dy.$$

5. *Si $D = D_1 \cup D_2$ et $D_1 \cap D_2$ = courbe ou point ou $\varnothing$, alors*
$$\iint\limits_{D} f(x,y)\ dx\ dy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\ dx\ dy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\ dx\ dy.$$

Preuve. Évident, d'après la définition. □

Théorème. **[Condition nécéssaire pour l'intégrabilité.]** *Si f est Riemann-intégrable sur un rectangle compact $D \subset \mathbb{R}^2$, alors f est bornée sur D.*

Preuve. Idée, par l'absurde: si f n'est pas bornée, en choisissant des points (x_i, y_j) proches d'un point où elle diverge on montre que la somme de Riemann correspondante diverge aussi. □

Théorème. **[Conditions suffisantes pour l'intégrabilité.]** *Une fonction f est Riemann-intégrable sur un rectangle compact $D \subset \mathbb{R}^2$ si elle vérifie une des hypothèses suivantes:*

1. *f est continue sur D.*
2. *f est bornée sur D et l'ensemble de ses discontinuités a mesure nulle.*
3. *f est la limite uniforme $f = \lim\limits_{k\to\infty} f_k$ d'une suite (f_k) de fonctions intégrables sur D. Dans ce cas, on a* $\displaystyle\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{k\to\infty} \iint\limits_{D} f_k(x,y)\,dx\,dy.$

Preuve. Comme pour les fonctions d'une variable. Si f est continue, la preuve comporte plusieurs étapes:

- D'abord, pour une subdivision σ_{nm} de D fixée, on définie les **sommes de Darboux de f:**
$$s_{nm}(f) := \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} m_{ij}\ \frac{(b-a)(d-c)}{nm}, \qquad \text{où} \quad m_{ij} = \inf_{I_i \times J_j} f,$$
$$S_{nm}(f) := \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} M_{ij}\ \frac{(b-a)(d-c)}{nm}, \qquad \text{où} \quad M_{ij} = \sup_{I_i \times J_j} f,$$
telles que $s_{nm}(f) \leqslant R_{nm}(f, \{(x_i, y_j)\}) \leqslant S_{nm}(f)$ pour tout choix de points $(x_i, y_j) \in I_i \times I_j$.
- On montre alors la condition d'intégrabilité suivante:
$$f \text{ est intégrable sur } D \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n,m\to\infty} s_{nm}(f) = \lim_{n,m\to\infty} S_{nm}(f).$$
- Enfin, on utilise le fait que si f est continue sur un compact alors elle est uniformement continue (Cantor/Heine), ce qui permet de trouver, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, une subdivision σ_{nm} telle que $M_{ij} - m_{ij} < \varepsilon$: il suffit de choisir n et m suffisement grands. On montre ainsi que $\lim_{n,m\to\infty} |\,S_{nm}(f) - s_{nm}(f)| = 0$, d'où suit que f est intégrable.

□

Théorème. **[Fubini]** *Soit* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $D = [a,b] \times [c,d]$*, donc intégrable. Alors les fonctions*

$$\begin{aligned} &[a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f(x,y), && \text{pour tout } y \in [c,d] \text{ fixé} \\ &[c,d] \longrightarrow \mathbb{R},\ y \mapsto f(x,y), && \text{pour tout } x \in [a,b] \text{ fixé} \end{aligned}$$

sont intégrables et on a

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right)\ dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx \right)\ dy$$

Preuve. Pour tout $x \in [a,b]$, posons $F(x) = \displaystyle\int_c^d f(x,y)\ dy$. Puisque f est continue, F l'est aussi, et est donc intégrable.

Considerons alors une partition $\{I_i\}_{i=1}^n$ de $I = [a,b]$ et une partition $\{J_j\}_{j=1}^m$ de $J = [c,d]$, de telle sorte que $\{I_i \times J_j\}_{i,j}$ soit une partition de $I \times J$. Si on pose

$$m_{ij} = \inf_{I_i \times J_j} f \qquad \text{et} \qquad M_{ij} = \sup_{I_i \times J_j} f,$$

et on appelle $\Delta_i = |\, I_i \,|$ et $\Delta_j = |\, J_j \,|$ les longuers des intervalles des partitions, on a

$$m_{ij}\, \Delta_j \leqslant \int_{J_j} f(x_i, y)\, dy \leqslant M_{ij}\, \Delta_j$$

pour tout $x_i \in I_i$, donc

$$\sum_{j=1,\dots,m} m_{ij}\, \Delta_j \leqslant \int_c^d f(x_i, y)\, dy \leqslant \sum_{j=1,\dots,m} M_{ij}\, \Delta_j$$

et enfin

$$s_{nm}(f) = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} m_{ij}\, \Delta_i\, \Delta_j \leqslant \sum_{i=1,\dots,n} \int_c^d f(x_i,y)\, dy\, \Delta_i \leqslant \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} M_{ij}\, \Delta_i\, \Delta_j = S_{nm}(f),$$

où $s_{nm}(f)$ et $S_{nm}(f)$ sont les sommes de Darboux de f et $\displaystyle\sum_{i=1,\dots,n} \int_c^d f(x_i,y)\, dy\, \Delta_i$ est la somme de Riemann de F. Les limites pour $n, m \to \infty$ donnent donc

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy \leqslant \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right)\ dx \leqslant \iint_D f(x,y)\ dx\ dy.$$

$\square$

Exemple.

$$\iint_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x \cos y\ dx\ dy = \int_0^1 x\ dx\ \int_0^{\pi/2} \cos y\ dy = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \left[\sin y\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

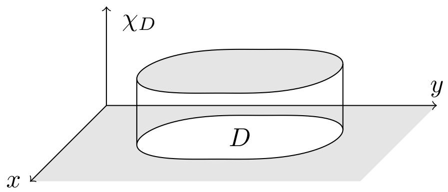
$$\begin{aligned} \iint_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2y - 1)\, dx\, dy &= \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (x^2 y - 1)\ dy = \int_{-1}^1 dx \left[\frac{1}{2}x^2y^2 - y\right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)\ dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - x\right]_{-1}^1 = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Cas de domaine D général.

Supposons que $D \subset \mathbb{R}^2$ soit un ensemble compact, toujours avec bord ∂D raisonnable, et soit f une fonction définie sur D. Pour donner un sens à l'intégrale de f sur D il y a plusieurs moyens, en voici deux.

Définition. On appelle **fonction indicatrice de** D la fonction $\chi_D : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\chi_D(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$



À noter que χ_D n'est pas continue sur le bord ∂D.

Définition. Maintenant, soit $I \times J$ un rectangle compact qui contient D. Une fonction f est **intégrable sur** D si la fonction produit $f\,\chi_D : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, qui vaut

$$(f\,\chi_D)(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

est intégrable sur le rectangle $I \times J$. Dans ce cas, on appelle **intégrale de f sur D** l'intégrale

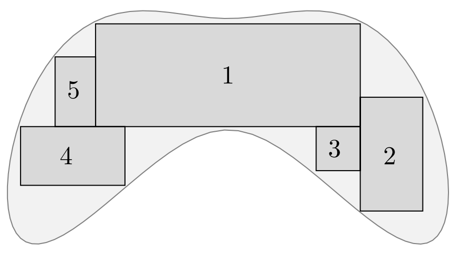
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy := \iint_{I\times J} (f\,\chi_D)(x,y)\,dx\,dy.$$

L'intégrale de f sur un domaine D quelconque a les mêmes propriétés que sur un rectangle, et les même conditions d'existence. En particulier, pour montrer qu'une fonction continue f est intégrable, puisque $f\,\chi_D$ est discontinue sur un sous-ensemble non dénombrable de $I \times J$ (le bord ∂D), il faut utiliser le fait que le bord a *mesure de Lebesgue nulle* dans $\mathbb{R}^2$ (comme toute courbe). Pour éviter ceci, il faut d'abord définir l'intégrale des *fonctions en escalier* (qui ne sont pas continues mais sont intégrables), et ensuite ecrire $f\,\chi_D$ comme somme de fonctions en escalier.

En alternative, on peut procéder comme suit.

Lemme. *Tout ensemble ouvert non vide U de $\mathbb{R}^2$ est la réunion d'une famille dénombrable de rectangles fermés quasi-disjoint (disjoints sauf sur leur bord).*

Preuve. La preuve rigoureuse comporte plusieurs étapes, mais l'idée est simple: on procède avec un algorithme qui consiste à choisir le plus grand rectangle D_1 contenu dans U et à le libeller par un point de son intérieur de coordonnées rationnelles, ensuite on repète cette opération sur toutes les composantes connexes (en nombre fini) du complémentaire de D_1 dans U et ainsi de suite. □



Définition. Soit D un ensemble compact et soit $\{D_r\}$ une famille dénombrable de rectangles fermés quasi-disjoints qui couvre l'intérieur de D. Alors on appelle **intégrale de f sur D** l'intégrale

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy := \sum_r \iint_{D_r} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Dans ce cas, pour montrer que f est intégrable si elle est continue, il faut montrer que la série

$$I_k = \sum_{r=1}^{k} \iint_{D_r} f(x,y)\,dx\,dy$$

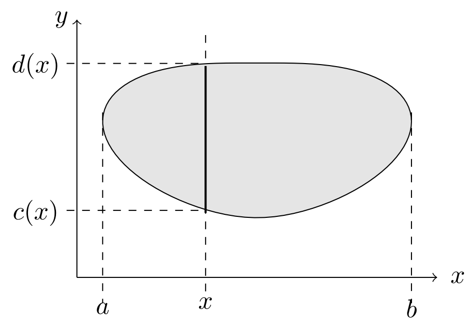
est absolument convergente et ne dépend pas du choix de la famille $\{D_r\}$.

Théorème. **[Fubini]** *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que*

$$D = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y \in [c(x), d(x)] \big\},$$

où les deux courbes

$$\partial D^- = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y = c(x) \big\}$$
$$\partial D^+ = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y = d(x) \big\}$$



decrivent le bord de D. Alors on a

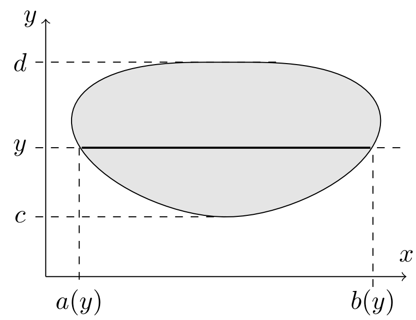
$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\ dy \right)\ dx.$$

En alternative, supposons que

$$D = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d],\ x \in [a(y), b(y)] \big\}$$

avec bord décrit par les courbes

$$\partial D^- = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d],\ x = a(y) \big\},$$
$$\partial D^+ = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d],\ x = b(y) \big\}.$$

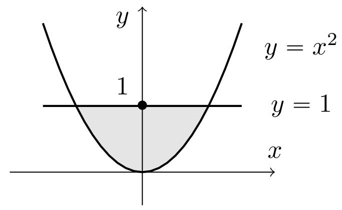


Alors on a

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\ dx \right)\ dy.$$

Exemples.

1. Soit D la partie du plan xOy délimitée par l'arc de parabole $y = x^2$ en bas, et la droite $y = 1$ en haut. On peut alors décrire D comme l'ensemble



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1],\ y \in [x^2, 1]\}.$$

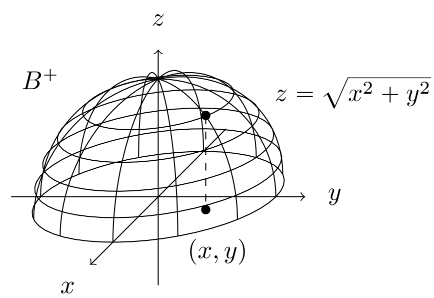
Par conséquent, on a:

$$\iint_D x^2 y \; dx \; dy = \int_{-1}^{1} x^2 \; dx \int_{x^2}^{1} y \; dy = \int_{-1}^{1} x^2 \left[\frac{1}{2} y^2\right]_{x^2}^{1} dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x^2 - x^4) \; dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{15}.$$

2. **Volume de la boule en coordonnées cartesiennes.** Le volume de la boule

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$$

est deux fois le volume de la demi-boule



$$B^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ y \geqslant 0\},$$

sous le graphe de la fonction $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

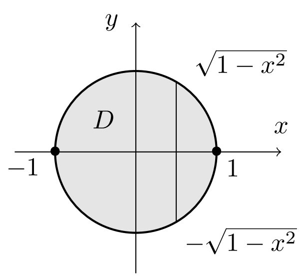
On a alors

$$\mathrm{Vol}(B) = 2 \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} \; dx \; dy,$$

où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

On peut décrire D comme l'ensemble



$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1],\ y \in \left[-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2}\right] \right\},$$

et on a donc

$$\mathrm{Vol}(B) = 2 \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \; dy$$
$$= 2 \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - \frac{y^2}{1 - x^2}} \; dy.$$

Avec le changement de variable $\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \sin t$, on a

$$\begin{aligned}
&-\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2} \quad \Longrightarrow \quad -1 \leqslant \sin t \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, \\
&\frac{y^2}{1-x^2} = \sin^2 t \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t \quad \text{pour } t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \\
&y = \sqrt{1-x^2}\, \sin t \quad \Longrightarrow \quad dy = \sqrt{1-x^2}\, \cos t\; dt.
\end{aligned}$$

Puisque $\displaystyle 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\; dt = \pi$, on a alors:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(B) &= 2\int_{-1}^{1} (1-x^2)\; dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\; dt = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\; dx \\
&= \pi \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^{1} = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Théorème. **[Changement de variables.]** *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction des variables (x,y) intégrable sur D, et soit $\phi : \tilde{D} \longrightarrow D$ un C^1-difféomorphisme, où l'on note $(x,y) = \phi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$. Alors on a*

$$\iint_D f(x,y)\; dx\; dy = \iint_{\tilde{D}} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\; \Big|\det J_\phi(u,v)\Big|\; du\; dv,$$

où $J_\phi(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$ *est la matrice Jacobienne du changement de coordonnées.*

En particulier, si $\phi(\rho,\theta) = \big(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\big)$ est le changement en **coordonnées polaires**, la matrice Jacobienne de ϕ est

$$J_\phi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

et donc $\det J_\phi(\rho,\theta) = \rho$.

Preuve. Considerons l'intégrale $\displaystyle\iint_D f(x,y)\, dx\, dy$ et le changement de variables $(x,y) = \phi(u,v)$. Pour exprimer l'intégrale en termes de la fonction $g(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$, il faut exprimer D et le l'élément d'aire $dx\; dy$ en termes de (u,v).

- Le domaine D se transforme en le domaine $\tilde{D} = \phi^{-1}(D) = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) = h(u,v) \in D\big\}$.

- Les éléments dx et dy se transforment comme

$$\begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial u}\, du + \dfrac{\partial x}{\partial v}\, dv \\[2mm] dy = \dfrac{\partial y}{\partial u}\, du + \dfrac{\partial y}{\partial v}\, dv \end{cases} \qquad \text{i.e. comme} \qquad \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = J_\phi(u,v) \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

où $J_\phi(u,v)$ est la matrice Jacobienne de ϕ.

- On regarde $dx\ dy$ comme l'aire d'un rectangle infinitésimal Δ de cotés dx et dy: l'aire se trouve comme un *produit vectoriel*, $dx\ dy = \left\| dx\,\vec{i} \wedge dy\,\vec{j} \right\|$, où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont les deux vecteurs orthogonaux du repère cartesien.

  Par changement de coordonnées, le rectangle Δ devient un parallélogramme Δ' de cotés du et dv dans la direction des vecteurs unitaires $\vec{e}_u$ et $\vec{e}_v$ (non nécéssairement orthogonaux) qui donnent la direction de changement des coordonnées (u,v). Son aire est alors donnée par le produit vectoriel $du\ dv = \|du\,\vec{e}_u \wedge dy\,\vec{e}_v\|$. Puisque l'ecriture en coordonnées

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = J_\phi(u,v)^{-1} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \qquad \text{signifie} \qquad \begin{cases} du\,\vec{e}_u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\, dx\,\vec{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\, dy\,\vec{j} \\[2mm] dv\,\vec{e}_v = \dfrac{\partial v}{\partial x}\, dx\,\vec{i} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\, dy\,\vec{j} \end{cases},$$

  on a

$$\begin{aligned} du\ dv := \|du\,\vec{e}_u \wedge dy\,\vec{e}_v\| &= \left\| \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\, dx\,\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy\,\vec{j}\Big) \wedge \Big(\frac{\partial v}{\partial x}\, dx\,\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy\,\vec{j}\Big) \right\| \\ &= \left\| \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\, dx\, dx\,\vec{i}\wedge\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\, dx\, dy\,\vec{i}\wedge\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\, dy\, dx\,\vec{j}\wedge\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\, dy\, dy\,\vec{j}\wedge\vec{j} \right\| \\ &= \left\| \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\, dx\, dy\,\vec{i}\wedge\vec{j} \right\| = \left|\det J_\phi(u,v)^{-1}\right|\ dx\ dy, \end{aligned}$$

  d'où suit $\quad dx\ dy = |\det J_\phi(u,v)|\ du\ dv$.

- Le raisonnement précédent ne marche que pour l'aire infinitésimale des rectangles du plan, car fait appel au produit vectoriel des vecteurs cotés. En alternative, il y a une idée qui est valable en toute dimension, et qui sera compréhensible après avoir vu les "formes différentielles": il s'agit d'intérpreter l'élément d'aire $dx\ dy$ comme un *produit wedge* entre *formes différentielles*, normalement noté $dx \wedge dy$. (Attention: en France seulement le produit vectoriel de vecteurs est noté $\wedge$, hors France il est noté $\times$!)

  On verra au prochain chapitre que ce produit est <u>linéaire</u> dans les coefficients de dx et dy (qui sont des fonctions) et <u>antisymétrique</u>:

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx \qquad \text{et donc aussi} \quad dx \wedge dx = 0, \quad dy \wedge dy = 0.$$

  Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= \Big(\frac{\partial x}{\partial u}\, du + \frac{\partial x}{\partial v}\, dv\Big) \wedge \Big(\frac{\partial y}{\partial u}\, du + \frac{\partial y}{\partial v}\, dv\Big) \\ &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}\, du\wedge du + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\, du\wedge dv + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\, dv\wedge du + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}\, dv\wedge dv \\ &= \Big(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\Big)\, du\wedge dv = \det J_\phi(u,v)\ du\wedge dv. \end{aligned}$$

Quand on identifie $dx\ dy$ à $dx \wedge dy$ en réalité on ne fait pas attention à l'ordre, on suppose que $dx\ dy = dy\ dx$. Pour éviter le changement de signe "$-$" qui viendrait de l'égalité $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$, il suffit d'adopter la formule avec la valeur absolue du détérminant Jacobien:

$$dx\ dy = \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| \ du\ dv = \Big| \det J_\phi(u,v) \Big| \ du\ dv.$$

$\square$

Exemple. Volume de la boule en coordonnées polaires. Considérons à nouveau la boule $B = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\big\}$, et calculons son volume

$$\mathrm{Vol}(B) = 2 \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\ dx\ dy, \qquad \text{où} \quad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\big\}$$

avec le changement de variables en coordonnées polaires, $(x,y) = \phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Puisque $x^2+y^2 = \rho^2$, on a:

$$\begin{aligned} &\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-\rho^2} \\ &\phi^{-1}(B) = \big\{(\rho,\theta) \in [0,\infty[\times[0,2\pi[\ \big|\ \rho \leqslant 1\big\} = [0,1]\times[0,2\pi[\end{aligned}$$

et donc, en sachant que $dx\ dy = \rho\, d\rho\ d\theta$ et en utilisant Fubini pour separer les variables, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(B) &= 2 \iint_{[0,1]\times[0,2\pi[} \sqrt{1-\rho^2}\ \rho\, d\rho\ d\theta \\ &= 2\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\ \rho\, d\rho\ \int_0^{2\pi} d\theta. \end{aligned}$$

L'intégrale en θ est simple: $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta = \big[\theta\big]_0^{2\pi} = 2\pi$. Pour l'autre, si on pose $t = 1-\rho^2$ on a $\sqrt{1-\rho^2} = \sqrt{t} = t^{1/2}$ et

$$\begin{aligned} &\rho = 0 \implies t = 1 \qquad \text{et} \qquad \rho = 1 \implies t = 0, \\ &dt = -2\rho\, d\rho \implies \rho\, d\rho = -\frac{1}{2}\ dt, \end{aligned}$$

et on obtient enfin

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(B) &= -\frac{2}{2}\ 2\pi \int_1^0 t^{1/2}\ dt \\ &= 2\pi \int_0^1 t^{1/2}\ dt \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\ t^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 \\ &= 2\pi\ \frac{2}{3}\Big[t^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 \\ &= \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

3.3 Intégrales triples

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de trois variables (x, y, z), définie sur un ensemble compact $D \subset \mathbb{R}^3$.

Définition. Si $D = I \times J \times K$ est un parallélépipède, on définit l'**intégrale triple de** f **sur** D comme la limite de la **somme de Riemann** de f associée à une **subdivision** σ_{nmk} de D en petits parallélépipèdes $I_i \times J_j \times K_k$ de volume qui tend vers zéro:

$$\iiint\limits_{I\times J\times K} f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \lim_{n,m,k\to\infty} \sum_{i,j,k} f(x_i,y_i,z_i)\, \frac{|\,I_i\,|}{n}\frac{|\,J_j\,|}{m}\frac{|\,K_k\,|}{k},$$

quelconque soit le choix des points $(x_i, y_i, z_i) \in I_i \times J_j \times K_k$, où $|\,I\,|$ denote la longueur de l'intervalle I.

Si D est un compact quelconque, contenu dans un parallélepipède $I \times J \times K$, on pose

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \iiint\limits_{I\times J\times K} (f\,\chi_D)(x,y,z)\ dx\ dy\ dz,$$

où $\chi_D : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est la **fonction indicatrice** de $D \subset \mathbb{R}^3$,

$$\chi_D(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y,z) \in D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette définition est l'analogue en dimension 3 de celle donnée en dimension 2 pour les intégrales doubles. Les intégrales triples ont donc les mêmes propriétés des intégrales doubles, et les mêmes théorèmes d'existance (f continue ou bien bornée et avec discontinuités de mesure nulle).

La signification géométrique de l'intégrale triple est plus abstraite: par analogie, le *volume (algébrique) sous le graphe de* f devient le **quadri-volume** *(algébrique) sous le graphe de* f.

Théorème. [Fubini.]

1. *Si* $D = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$ *est un parallélépipède, alors:*

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g dz\ f(x,y,z) \qquad \textit{(dans l'ordre qu'on veut).}$$

2. *Si* $D = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \Big|\ x \in [a,b],\ \ y \in [c(x), d(x)],\ \ z \in [e(x,y), g(x,y)] \Big\}$ *est un compact quelconque, alors:*

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \int_{e(x,y)}^{g(x,y)} dz\ f(x,y,z) \qquad \textit{(ordre forcé).}$$

Exemples.

1.

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{[0,1]\times[1,2]\times[2,3]} (x^2-2yz)\ dx\ dy\ dz &= \int_2^3 dz\ \int_1^2 dy \int_0^1 dx\ (x^2-2yz)\\
&= \int_2^3 dz\ \int_1^2 dy\ \Big[\ \frac{1}{3}x^3 - 2xyz\ \Big]_{x=0}^{x=1}\\
&= \int_2^3 dz\ \int_1^2 dy\ \Big(\frac{1}{3} - 2yz\Big)\\
&= \int_2^3 \Big[\ \frac{1}{3}y - y^2 z\ \Big]_{y=1}^{y=2}\ dz\\
&= \int_2^3 \Big(\ \frac{2}{3} - 4z - \frac{1}{3} + z\ \Big)\ dz\\
&= \int_2^3 \Big(\ \frac{1}{3} - 3z\ \Big)\ dz\\
&= \Big[\ \frac{1}{3}z - \frac{3}{2}z^2\ \Big]_2^3\\
&= \frac{3}{3} - \frac{27}{2} - \frac{2}{3} + \frac{12}{2} = \frac{1}{3} - \frac{15}{2} = -\frac{43}{6}
\end{aligned}$$

2. Si C est le cylindre plein, de base le disque $D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant 1,\ z=0\Big\}$ et de hauteur 3, on peut écrire

$$\begin{aligned}
C &= \Big\{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 3\ \Big\}\\
&= \Big\{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [-1,1],\ y \in \big[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\big],\ z \in [0,3]\ \Big\}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_C (1-2yz)\ dx\ dy\ dz &= \int_0^3 dz \iint\limits_D (1-2yz)\ dx\ dy\\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dx\ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-2yz)\ dy\\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \Big[y - y^2 z\Big]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}}\ dx\\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \Big(\sqrt{1-x^2} - (1-x^2)z + \sqrt{1-x^2} + (1-x^2)z\Big)\ dx\\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2}\ dx\\
&= 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t\ dt = 3\pi
\end{aligned}$$

Théorème. **[Changement de variables.]** *Si* $(x, y, z) = \phi(u, v, w)$ *est un changement de variables (un* C^1*-difféomorphisme), alors:*

$$\iiint_D f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \iiint_{\phi^{-1}(D)} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\ \Big|\det J_\phi(u,v,w)\Big|\ du\ dv\ dw$$

En particulier, pour les changements ϕ en **coordonnées cylindriques** (ρ, θ, z) et en **coordonnées sphériques** (r, θ, φ), donnés par

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$$

les matrices Jacobiennes sont

$$J_\phi(\rho,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

et donc on a

$$dx\ dy\ dz \quad = \quad \rho\ d\rho\ d\theta\ dz \quad = \quad r^2\cos\varphi\ dr\ d\theta\ d\varphi.$$

Exemple. Considerons à nouveau l'intégrale de la fonction $f(x, y, z) = 1 - 2yz$ sur le cylindre plein C, de base le disque $D = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = 0\big\}$ et de hauteur 3. En coordonnées cartesiennes on a

$$C = \Big\{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 3\ \Big\},$$

en coordonnées cylindriques on a

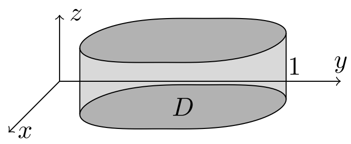
$$\phi^{-1}(C) = \Big\{\ (\rho,\theta,z) \mid \rho \in [0,1],\ \theta \in [0, 2\pi[,\ z \in [0,3]\ \Big\}$$

et donc, puisque $dx\ dy\ dz = \rho\, d\rho\ d\theta\ dz$, on a

$$\begin{aligned} \iiint_D (1-2yz)\ dx\ dy\ dz &= \iiint_{\phi^{-1}(D)} (1 - 2\rho\sin\theta\, z)\ \rho\, d\rho\ d\theta\ dz \\ &= \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\, d\rho\ \int_0^{2\pi} (1 - 2\rho\sin\theta\, z)\ d\theta \\ &= \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\, d\rho\ \Big[\ \theta + 2\rho\cos\theta\, z\ \Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\ &= \int_0^3 dz \int_0^1 \Big(\ 2\pi + 2\rho z - 2\rho z\ \Big)\ \rho\, d\rho \\ &= \int_0^3 dz \int_0^1 2\pi\ \rho\, d\rho \\ &= 3\ \pi\ \Big[\ \rho^2\ \Big]_0^1 = 3\pi \end{aligned}$$

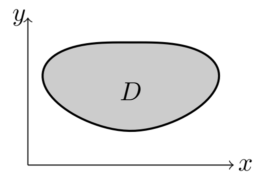
3.4 Aire et volume

Si D est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, l'intégrale $\displaystyle\iint_D dx\ dy$ represente le volume sous le graphe de la fonction constante $f(x, y) = 1$: ce solide est un cylindre de hauteur 1 et de base D, son volume est donc égal à l'aire de D multipliée par la hauteur, qui vaut 1.



Définition. Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^2$. L'**aire** de D est l'intégrale double

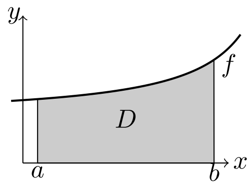
$$\text{Aire}(D) = \iint_D dx\ dy$$



Proposition. *Si D est la portion du plan sous le graphe d'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ positive, c'est-à-dire si*

$$D = \left\{ \ (x, y) \mid x \in [a, b],\ \ y \in [0, f(x)] \ \right\},$$

alors on a: $\displaystyle \text{Aire}(D) = \int_a^b f(x)\ dx$.



Preuve. En effet, si $D = \left\{ \ (x, y) \mid x \in [a, b],\ \ y \in [0, f(x)] \ \right\}$, on a

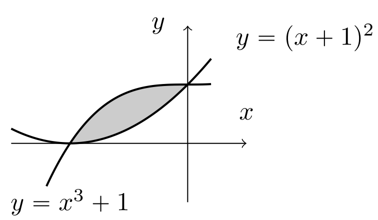
$$\begin{aligned}
\text{Aire}(D) &= \iint_D dx\ dy \\
&= \int_a^b dx\ \int_0^{f(x)} dy \\
&= \int_a^b \big[\, y\, \big]_0^{f(x)}\ dx \\
&= \int_a^b f(x)\ dx.
\end{aligned}$$

□

Exemple. Calculons l'aire du domaine D de $\mathbb{R}^2$ délimité par les courbes d'équation $y = x^2 + 2x + 1$ et $y = x^3 + 1$.

D'abord on dessine le domaine D: les deux courbes $y = x^3 + 1$ et $y = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ se rencontrent aux points $(-1, 0)$ et $(0, 1)$. On a donc

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 0,\ x^2 + 2x + 1 \leqslant y \leqslant x^3 + 1\Big\}.$$

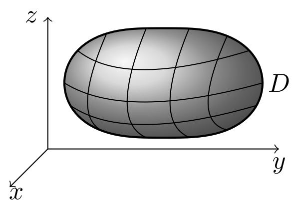


Donc

$$
\begin{aligned}
\text{Aire}(D) &= \iint\limits_D dx\ dy \\
&= \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} dy \\
&= \int_{-1}^{0} [\ y\ ]_{x^2+2x+1}^{x^3+1}\ dx \\
&= \int_{-1}^{0} \left(x^3 + 1 - x^2 - 2x - 1\right)\ dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0} \\
&= -\frac{1}{4}(-1)^4 + \frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 \\
&= -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{12}.
\end{aligned}
$$

Définition. Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^3$. Le **volume** de D est l'intégrale triple

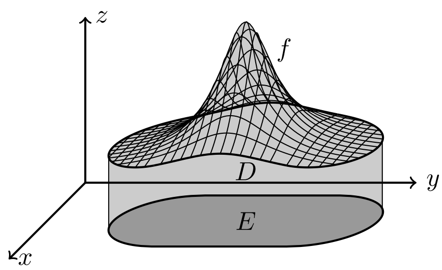
$$\text{Vol}(D) = \iiint\limits_D dx\ dy\ dz$$



Proposition. *Si D est la portion d'espace sous le graphe d'une fonction $f : E \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ positive, c'est-à-dire si*

$$D = \left\{\ (x, y, z) \mid (x, y) \in E \subset \mathbb{R}^2,\ \ z \in [0, f(x, y)]\ \right\},$$

alors on a: $\text{Vol}(D) = \iint\limits_E f(x, y)\ dx\ dy.$



Preuve. En effet, si $D = \left\{\ (x, y, z) \mid (x, y) \in E \subset \mathbb{R}^2,\ \ z \in [0, f(x, y)]\ \right\}$, on a

$$
\begin{aligned}
\text{Vol}(D) &= \iiint\limits_D dx\ dy\ dz \\
&= \iint\limits_E dx\ dy \int_0^{f(x,y)} dz = \iint\limits_E [\ z\ ]_0^{f(x,y)}\ dx\ dy \\
&= \iint\limits_E f(x, y)\ dx\ dy.
\end{aligned}
$$

$\square$

Exemple. **Volume de la boule en coordonnées sphériques.** En coordonnées sphériques, la boule $B = \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \big\}$ devient

$$\phi^{-1}(B) = \big\{ (r,\theta,\varphi) \mid r \in [0,1],\ \theta \in [0,2\pi[,\ \varphi \in [-\pi/2,\pi/2] \big\},$$

et, puisque $dx\ dy\ dz = r^2 \cos\varphi\ dr\ d\theta\ d\varphi$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(B) &= \iiint\limits_B dx\ dy\ dz \\
&= \iiint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi[\times[-\pi/20,\pi/2]} r^2 \cos\varphi\ dr\ d\theta\ d\varphi \\
&= \int_0^1 r^2\ dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\ d\varphi \\
&= \frac{1}{3}\ 2\pi \Big[\sin\varphi \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{2\pi}{3}\ (1+1) = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

3.5 Intégrales curvilignes et de surface

Définition. Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière, avec support $\gamma(I)$ borné dans $\mathbb{R}^3$, et soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable définie sur $\gamma(I)$. On appelle **intégrale curviligne** de f sur γ l'intégrale

$$\int_\gamma f\,ds := \int_I f\big(\gamma(t)\big)\ \|\gamma'(t)\|\,dt,$$

où la quantité infinitesimale ds s'appelle **élément d'arc** (et s est le paramètre par longueur d'arc).

Proposition. *Si $\phi : J \longrightarrow I$ est un C^1-difféomorphisme et $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ la reparamétrisation de γ dans le paramètre $u = \phi^{-1}(t)$, alors on a*

$$\int_\gamma f\,ds = \int_{\tilde{\gamma}} f\,ds.$$

Preuve. Par définition, on a $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\phi^{-1}(t))$, donc

$$\|\gamma'(t)\| = \|\tilde{\gamma}'(\phi^{-1}(t))\| \cdot |(\phi^{-1}(t))'| = \|\tilde{\gamma}'(u)\| \frac{1}{|\phi'(u)|}.$$

Puisque ϕ est un difféomorphisme, on a $\phi'(u) \neq 0$ pour tout $u \in J$ et ϕ' continue, donc ϕ' a signe constant sur J, positif ou négatif. Alors:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f\,ds &= \int_I f\big(\gamma(t)\big)\,\|\gamma'(t)\|\,dt \\
&= \int_{\phi^{-1}(I)} f\big(\tilde\gamma(u)\big)\,\|\tilde\gamma'(u)\|\frac{1}{|\phi'(u)|}\,\phi'(u)\,du \\
&= \pm\int_{\phi^{-1}(I)} f\big(\tilde\gamma(u)\big)\,\|\tilde\gamma'(u)\|\,du \\
&= \int_J f\big(\tilde\gamma(u)\big)\,\|\tilde\gamma'(u)\|\,du \\
&= \int_{\tilde\gamma} f\,ds,
\end{aligned}$$

où le signe $\pm$ est en accord avec le changement des bornes d'intégration de l'intégrale sur $J = \phi^{-1}(I)$. □

Exemple. La longueur d'une courbe $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est

$$L(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_I \|\gamma'(t)\|\,dt.$$

Définition. Soit $\sigma : U \times V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la paramétrisation régulière d'une surface S, avec $U \times V$ borné dans $\mathbb{R}^3$, et soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable définie sur S. On appelle **intégrale de surface** de f sur S l'intégrale

$$\iint\limits_S f\,dA := \iint\limits_{U\times V} f\big(\sigma(u,v)\big)\,\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)\right\|\,du\,dv,$$

où la quantité infinitesimale dA s'appelle **élément d'aire** et est aussi notée dS ou $d\Sigma$.

Proposition. *L'intégrale de surface est indépendant de la paramétrisation.*

Preuve. Formule de changement des variables pour les intégrales doubles. □

Exemple. L'aire d'une surface S paramétrée par $\sigma : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est

$$\mathrm{Aire}(S) = \iint\limits_S dA = \iint\limits_{U\times V} \left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)\right\|\,du\,dv.$$