FICHE TD 1 - COURBES PARAMÉTRÉES

Support des courbes paramétrées

Exercice 1.

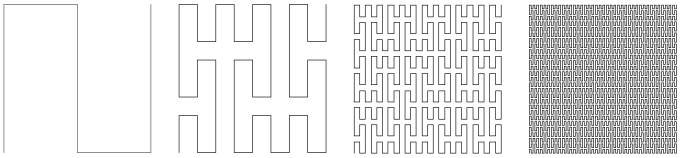
a) On considère une courbe plane paramétrée γ de classe $\mathcal{C}^1$ et régulière. Quelle est la limite des droites passant par $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$ quand t tend vers 0 ?

b) On considère un angle droit $\Gamma = \{(x,0)|\, x \geq 0\} \cup \{(0,y)|y \geq 0\}$ dans le plan : 
Cette figure est-elle le *support* d'une courbe paramétrée ? Trouver un paramétrage C^0.
Admet-elle aussi un paramétrage C^∞ ? *Indication :* utiliser la fonction $f(t) = e^{-1/t^2}$.
Ce paramétrage est-il régulier au point O ? Peut-on avoir un paramétrage régulier en O ?

c) On considère la **courbe cuspidale** $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. Dessiner la courbe autour de $t = 0$. Est-elle régulière en $(0,0)$?
Soit Γ la partie de cette courbe décrite par $t \in [0, \infty)$. Donner un paramétrage C^1 de Γ qui soit régulier en $(0,0)$. Montrer qu'il n'y a pas de paramétrage C^2 de Γ qui soit régulier en $(0,0)$.

d) Trouver un paramétrage de la courbe $\gamma(t) = (t^3, t^4 + t^5)$, $t \in \mathbb{R}$, qui soit régulier en $(0,0)$.

e) [*Facultatif.*] Est-il vrai que toute courbe paramétrée C^0 admet aussi une paramétrisation C^∞ ?
Indication : Regarder la **courbe de Peano** https://www.mathcurve.com/fractals/peano/peano.shtml



Déterminer la mesure de son support. Comparer ce résultat à celui pour une courbe parametrée C^1.

Exercice 2. Pour les courbes suivantes, trouver les symétries, les points singuliers (qu'on étudiera à l'aide d'un dévéloppement limité), ainsi qu'une équation décrivant le support de la courbe en coordonnées cartésiennes. Enfin, dessiner chaque courbe.

a) L'**astroïde** $\gamma(t) = \big(\cos^3 t, \sin^3 t\big)$, $t \in [0, 2\pi[$.

b) La **néphroïde** $\gamma(t) = \big(3\cos t - \cos(3t), 3\sin t - \sin(3t)\big) = \big(6\cos t - 4\cos^3 t, 4\sin^3 t\big)$, $t \in [0, 2\pi[$.

c) La **chaînette** $\gamma(t) = \big(\ln t, t + \frac{1}{t}\big)$, $t > 0$.

Exercice 3. Soit $\{D_t, t \in I\}$ une famille de droites du plan. L'**enveloppe de la famille** $\{D_t\}$ est une courbe $\gamma(t)$, $t \in I$ dont les droites D_t sont les tangentes.

a) Supposons que les droites D_t soient décrites par l'équation $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$, où a, b et c sont des fonctions de classe C^1. Montrer que l'enveloppe $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ vérifie le système

$$a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0$$
$$a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) = 0.$$

En déduire une représentation paramétrique de $\gamma(t)$.

b) Exemple : on considère un segment de longueur L dont les extrémités glissent le long des côtés d'un angle droit (une échelle posée contre un mur). L'**astroïde** est la frontière de la zone balayée par le segment. Déterminer l'astroïde comme courbe parametrée et comme graphe d'une fonction.

Exercice 4. Une **courbe (en) polaire** est une courbe plane γ paramétrée par la distance à l'origine en fonction de l'angle de rotation autout de l'origine, dans le sens antihoraire à partir de l'axe $\vec{Ox}$, c'est-à-dire la courbe

$$\gamma(\varphi) = (r(\varphi)\cos(\varphi), r(\varphi)\sin(\varphi)) = r(\varphi)e^{i\varphi},$$

où $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ \varphi \mapsto r(\varphi)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

a) Sous quelles conditions une courbe polaire est-elle régulière ? Quels peuvent être les points singuliers ?

b) Montrer qu'une courbe plane régulière γ qui évite l'origine admet une paramétrisation comme courbe polaire si et seulement si le vecteur vitesse γ' n'est jamais proportionnel au vecteur position γ.

c) Pour quelles valeurs des paramètres réels a, b, c la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet-elle une paramétrisation polaire ? Écrire cette paramétrisation dans ces cas.

d) Écrire une paramétrisation de la courbe cuspidale $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ en polaire, pour $t > 0$.

e) Dessiner la courbe $r = \cos(n\varphi) + 2$ pour $n = 1, 2, 3$.

f) [*Facultatif.*] Étudier les courbes définies par $r = \frac{p}{1-e\cos\varphi}$, où $p, e > 0$, selon les cas $e < 1$, $e = 1$ et $e > 1$.

Longueur

Exercice 5. Soient $a \leq c \leq b$ des réels et $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée continue. Montrer que

$$L(\gamma) = L\big(\gamma|_{[a,c]}\big) + L\big(\gamma|_{[c,d]}\big).$$

Exercice 6. Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée continue et soit $\tilde{\gamma} : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ une *reparamétrisation* de γ, c'est-à-dire la courbe $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ où $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ est le *changement de paramétrisation de classe* C^0 (i.e. φ est un homéomorphisme). Montrer que γ est *rectifiable* si et seulement si $\tilde{\gamma}$ l'est et, dans ce cas, que

$$L(\gamma) = L(\tilde{\gamma}).$$

Y a-t-il une différence que φ soit croissant ou décroissant ?

Exercice 7. Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^1. D'après un résultat de cours, la longueur de γ est donnée par la formule

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t,$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Montrer que cette formule est invariante par changement de paramétrisation de classe C^1.

Exercice 8. La **cardioïde** est la courbe plane définie en coordonnées polaires par

$$r(\varphi) = 1 + \cos\varphi \qquad (\text{ou bien } r(\varphi) = 1 + \sin\varphi, \text{ etc}), \qquad \varphi \in [0, 2\pi] \, .$$

Dessiner la cardioïde et calculer sa longueur.

Courbure

Exercice 9. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ une courbe plane régulière paramétrée par le paramètre t qui n'est pas l'abscisse curviligne s. En utilisant la reparamétrisation $t = t(s)$, montrer que la courbure de γ vaut

$$k(t) = \frac{\sqrt{\|\gamma'(t)\|^2 \cdot \|\gamma''(t)\|^2 - \langle \gamma'(t)), \gamma''(t) \rangle^2}}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

N.B. Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ est une courbe de l'espace, on a aussi $k(t) = \dfrac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$.

Exercice 10. Quelles sont les courbes planes régulières à courbure constante ?

Exercice 11. a) Calculer le paramètre par longueur d'arc et la courbure d'une courbe polaire.

b) Calculer la courbure des courbes polaires définies par $r = \frac{p}{1-e\cos\varphi}$, où $p, e > 0$, selon les cas $e < 1$, $e = 1$ et $e > 1$.

Exercice 12. La **spirale logarithmique** est la courbe $\gamma(t) = (e^{at}\cos t, e^{at}\sin t) = e^{(a+i)t}$, $t \in \mathbb{R}$, où $a \neq 0$.

a) Dessiner la spirale logarithmique.

b) Calculer l'abscisse curviligne et la courbure de la spirale logarithmique.

c) Montrer que, pour $a > 0$, on a $\gamma(t) \to (0,0)$ quand $t \to -\infty$. Montrer que la longueur d'arc entre 0 et t a une limite finie quand $t \to -\infty$.

d) Quelles sont les courbes planes régulières dont le rayon de courbure est proportionnel à l'arc ?

e) Montrer que la tangente à la spirale logarithmique fait un angle constant avec la droite joignant le point courant à l'origine. Quelles sont les courbes planes ayant cette propriété ?

Exercice 13. Une roue roule sans glisser sur une droite dans le plan vertical. La courbe tracée par un point du bord de la roue s'appelle **cycloïde**.

a) Dessiner la cycloïde, montrer qu'elle peut être paramétrée par

$$\gamma(t) = a\,\big(t - \sin t, 1 - \cos t\big), \qquad t \in \mathbb{R},$$

où $a > 0$ est le rayon de la roue, et déterminer ses points singuliers.

b) Calculer l'abscisse curviligne et la courbure de la cycloïde. Exprimer la courbure en fonction de l'abscisse curviligne. Calculer la longueur de la cycloïde qui correspond à un tour complet de la roue.

c) Quelle est la forme des courbes décrites par des points intérieurs (respectivement, extérieurs) de la roue ?

d) Etudier les points singuliers.

Exercice 14. Soit γ une courbe birégulière. On suppose que γ est située à l'intérieur (respectivement, à l'extérieur) d'un cercle C et qu'elle touche le cercle au point $p : \gamma(t_0) = p \in C$.

Montrer que le cercle osculateur de γ en p est situé à l'intérieur (respectivement, à l'extérieur) de C. [L'intérieur et l'extérieur sont traités dans le sens large.] Quelle conclusion pour le rayon de courbure en p ?

Exercice 15. Soit γ une courbe régulière, soit ρ le rayon de courbure en $\gamma(t_0) = p$ (on suppose que $\rho < \infty$). Soit C_r un cercle de rayon r qui est tangent à γ en p et situé dans le demi-plan de concavité de γ en p (le demi-plan indiqué par la normale principale de γ en p).

Montrer que pour t proche de t_0, $\gamma(t)$ est situé à l'intérieur de C_r si $r > \rho$, et à l'extérieur de C_r si $r < \rho$.

Exercice 16 (Partiel 2009)**.** Soit γ une courbe birégulière de $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que si tous les plans normaux de γ passent par un point fixe, alors γ est située sur une sphère.

b) Montrer que si tous les plans osculateurs de γ passent par un point fixe, alors γ est une courbe plane.

Exercices facultatifs

Exercice 17. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire euclidien et de la norme associée. Caractériser les isométries de cet espace euclidien comme produit semidirect de groupes $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$.

Exercice 18. L'**hélice circulaire** est la courbe $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, at)$, où $a \neq 0$.

a) Déterminer l'abscisse curviligne, la courbure et la torsion.

b) Déterminer son plan osculateur.

c) Montrer que, pour tout t, la droite passant par $\gamma(t)$ et de vecteur directeur $\vec{n}(t)$ coupe l'axe Oz sous un angle égal à $\frac{\pi}{2}$.

d) Montrer que la tangente en tout point fait avec l'axe Oz un angle constant.

Exercice 19. On considère une famille de courbes du plan paramétrée par $t \in \mathbb{R}$ et définie par $\mathcal{C}_t := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, F_t(x,y) := F(x,y,t) = 0\}$. L'**enveloppe de la famille** $\{\mathcal{C}_t\}$, ou **contour apparent**, est l'ensemble E des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels qu'il existe un t avec :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(x,y,t)=0 \\ F(x,y,t) =0 \end{cases}$$

On suppose ici que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la courbe $\mathcal{C}_t$ admet une paramétrisation régulière $u \mapsto \alpha_t(u) := \alpha(t,u)$, avec $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

a) Montrer que, pour tout $(t,u) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial \alpha_t}{\partial u}(u)$ est orthogonal à $\nabla F_t(\alpha_t(u))$.

b) Montrer que, pour tout (t,u), $\alpha_t(u) \in E$ si et seulement si

$$\det\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}(t,u), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t,u)\right) = 0 \ .$$

c) **Enveloppe de cercle ou Fronts.** A partir des résultats précédents, déterminer le "front" ou enveloppe des cercles de rayon 1 centrés sur une parabole d'équation paramétrique $t \mapsto (t, t^2)$. Etudier cette enveloppe et donner son interprétation géométrique.

d) **Caustiques dans une tasse de café.** Un faisceau de rayons lumineux (parallèles) est réfléchi sur une paroie circulaire, quelle est l'enveloppe des droites réfléchies ?

Exercice 20. Soit γ une courbe plane birégulière. La **développée** de γ est le lieu des centres de courbure.

a) Ecrire la représentation paramétrique $\alpha(t) = \dots$ de la développée.

b) Montrer que la développée est régulière si la dérivée de la courbure de γ ne s'annule pas.

c) Montrer que la tangente à α en $\alpha(t)$ est la normale à γ en $\gamma(t)$. [La développée est l'enveloppe des droites normales de γ.]

d) Montrer que si γ est de classe C^3 et $\rho' \neq 0$ entre t et t', la longueur d'arc de la développée entre t et t' est égale à $|\rho(t) - \rho(t')|$.

e) Montrer que quand t' tend vers t, le point d'intersection de la normale à γ en $\gamma(t)$ avec la normale à γ en $\gamma(t')$ tend vers $\alpha(t)$.

f) Déterminer la développée de la spirale logarithmique.

g) Dessiner la développée de l'ellipse. Que se passe-t-il aux sommets de l'ellipse ?

h) Montrer que la developpée d'un cycloïde est un cycloïde.

Exercice 21. Soit γ une courbe plane régulière paramétrée par son abscisse curviligne. La **développante** de γ s'obtient de façon suivante. On prend un fil de longueur ℓ, on fixe une extrémité du fil au point $\gamma(0)$ et on laisse le fil suivre la courbe γ jusqu'en un point $\gamma(s)$, $0 \leq s < \ell$, en tenant l'autre extrémité $\beta(s)$ sous tension : la portion de fil d'extrémités $\gamma(s)$ et $\beta(s)$ est un segment de droite tangent à γ en $\gamma(s)$. La développante est la courbe décrite par le point $\beta(s)$.

a) Ecrire la représentation paramétrique de la développante.

b) Montrer que la développante est régulière si la courbure de γ ne s'annule pas.

c) Montrer que la normale à β en $\beta(s)$ est la tangente à γ en $\gamma(s)$.

d) Déterminer la courbure et le centre de courbure de la développante en s. En sachant que la développée d'une courbe est le lieu des centres de courbure, quelle est la développée de β ?

e) Dessiner la développante du cercle.

f) Quelle est la forme de la développante si le fil passe par un point d'inflexion sur γ ? Dessiner la développante de la courbe $\gamma(t) = (t, t^3)$.