# FICHE TD 2 - SOUS-VARIÉTÉS

## Caractérisation des sous-variétés par leur définition

**Exercice 1.** .

a) Le segment ouvert $]a, b[\subset \mathbb{R}$ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}$ ?

b) Et le segment fermé $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ?

c) Montrer qu'une sous-variété $S \subset \mathbb{R}^n$ de dimension $n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

**Exercice 2.** .

a) L'ensemble $\mathbb{N}^* = \{1, 2, ...\}$ des entiers positifs est-il une sous-variété de $\mathbb{R}$ ?

b) Montrer qu'une sous-variété $S \subset \mathbb{R}^n$ de dimension 0 est un ensemble de points isolés. Cet ensemble peut-il être dénombrable ? Et non dénombrable ?

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $L_n$ la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x = 1/n$. L'ensemble $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} L_n \subset \mathbb{R}^2$ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ ?

d) Soit $M_0$ la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x = 0$ et posons $M' = M \cup M_0$. L'ensemble $M'$ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ ?

**Exercice 3.** .

a) Donner un exemple d'intersection de deux sous-variétés de $\mathbb{R}^3$ qui est une sous-variété.

b) Donner un exemple d'intersection de deux sous-variétés de $\mathbb{R}^3$ qui *n'est pas* une sous-variété.

**Exercice 4.** Soit $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ le cercle unitaire. Montrer que le $n$**-tore**

$$T^n := \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n}$$

est une sous-variété lisse de dimension $n$ de $\mathbb{R}^{2n}$.

## Caractérisation des sous-variétés par submersions

**Exercice 5.** .

a) Pour quels valeurs de $\alpha$ l'ensemble $A_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = \alpha\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ ?

b) Pour quels valeurs de $\beta$ l'ensemble $B_\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^3 = \beta\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ ?

**Exercice 6.** Les sous-ensembles suivants, sont-ils des sous-variétés ?

a) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^5 - 3y^2 - z = 0\}$

b) $S_2 = \{(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5 \mid xy^2 - u = 0,\ x^3 + 3yz - v = 0\}$

c) $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy^2 - z = 0,\ x + y = 0\}$

**Exercice 7.** Les sous-ensembles suivants, sont-ils des sous-variétés ?

a) La cubique $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 13 = 0\}$.

b) La fenêtre de Viviani $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 - x = 0\}$.

**Exercice 8.** Considérons la sphère $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ et le cylindre

$$C = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

Quel est le sous-espace maximale de l'intersection $\mathbb{S}^2 \cap C$ qui forme une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ ?

**Exercice 9.** .

a) Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$ est-il une sous-variété de l'espace de matrices $M_n(\mathbb{R})$ ?

b) Montrer que le groupe spécial linéaire $SL_n(\mathbb{R})$, des matrices inversibles de déterminant 1, est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$. De quelle dimension ?

c) Montrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$, des matrices $A$ telles que ${}^tAA = 1$, est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$. De quelle dimension ?

## Caractérisation des sous-variétés par immersions

**Exercice 10.** Le support du cusp $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ pour $t \in \mathbb{R}$, est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ ? Et si on prend $t \geq 0$ ? Et pour $t > 0$ ?

**Exercice 11.** Le support de la spirale logarithmique $\gamma(t) = e^{at}(\cos t, \sin t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ ?

**Exercice 12.** Trouver une paramétrisation locale de la courbe

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0\}$$

au voisinage des points $(0,0)$ et $(-1,0)$.

**Exercice 13.** Soit $f(\theta,\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$ la paramétrisation en coordonnées sphériques de la sphère $\mathbb{S}^2$, pour $\pi/2 < \theta < \pi/2$ et $0 \leq \varphi < 2\pi$.

a) Montrer que $u = \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ est un changement de paramètre et trouver le nouveau paramétrage $g(u,\varphi)$ de la sphère.

b) Déterminer l'ensemble $g^{-1}(C)$, où $C$ est un méridien ou un parallèle de la sphère.

**Exercice 14.** .

a) Montrer que le tore, parametré par

$$f(u,v) = \big((2+\cos u)\cos v, (2+\cos u)\sin v, \sin u\big),$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer que, si $\alpha$ est un nombre irrationnel, la courbe paramétrée

$$\gamma(t) = \big((2+\cos t)\cos(\alpha t), (2+\cos t)\sin(\alpha t), \sin t\big)$$

est partout dense sur le tore, et expliquer pourquoi ce n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

## Exercices facultatifs de topologie générale

**Exercice 15** (Restriction d'applications continues)**.** Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques et soit $f : X \to Y$ une application continue.

Montrer que si $A$ est une partie de $X$, alors la restriction $f|_A : A \to Y$ est aussi continue.

**Exercice 16** (Recollement d'applications continues)**.** Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, $A, B \subset X$ deux parties fermées et

$$f\colon A \to Y \quad \text{et} \quad g\colon B \to Y$$

deux applications continues telles que

$$f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}\ .$$

a) Montrer qu'il existe une unique application $F\colon A \cup B \to Y$ telle que

$$F|_A = f \quad \text{et} \quad F|_B = g\ ,$$

et que $F$ est continue.

b) L'hypothèse que $A$ et $B$ sont fermés est essentielle. Chercher un contre-exemple avec $X = Y = \mathbb{R}$, pour $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ouvert et $B = \{0\}$ fermé.