

CONTRÔLE TERMINAL DE MATH 2

Mardi 16 décembre 2008. Durée de l'épreuve : 2 heures.

Il est interdit d'utiliser des calculatrices. Il est admis de consulter des notes personnelles qui tiennent sur une page recto-verso et les deux fiches distribuées en cours. Les téléphones portables doivent être éteints.

Exercice 1 Soit $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^3$ une fonction de deux variables.

1. Chercher les points critiques de f et donner leur nature.
2. La fonction f admet-elle des extrema globaux dans le plan ?

Exercice 2 Soit $\vec{V}(x, y) = (3x^2 + y^2) \vec{i} + 2xy \vec{j}$ un champ de vecteurs dans le plan.

1. \vec{V} est-il un champ de gradient ? Si oui, calculer son potentiel.
2. Calculer la circulation de \vec{V} le long du demi-cercle $C = \{x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}$ orienté dans le sens horaire.

Exercice 3 Soit $\vec{U}(x, y) = xy \vec{i} + y^3 \vec{j}$ un champ de vecteurs dans le plan.

1. Calculer la circulation de \vec{U} le long de la courbe $\gamma_1 = \{(x, y), y = x^2, 0 \leq x \leq 1\}$ orientée dans le sens des x croissants.
2. Calculer la circulation de \vec{U} le long de la courbe $\gamma_2 = \{(x, y), x = y^2, 0 \leq y \leq 1\}$ orientée dans le sens des y décroissants.
3. Soit D le domaine délimité par les courbes γ_1 et γ_2 . Calculer l'intégrale double

$$I = \iint_D x \, dx \, dy.$$

4. On identifie le champ de vecteur \vec{U} de \mathbb{R}^2 avec le champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 donné par $xy \vec{i} + y^3 \vec{j} + 0 \vec{k}$, et le domaine D avec une surface de \mathbb{R}^3 contenue dans le plan xOy . Retrouver la valeur de I en utilisant la formule de Green-Riemann pour calculer le flux de $\vec{V} = \text{rot } \vec{U}$ à travers D .