CONTRÔLE TERMINAL DE MATH 2

Mercredi 21 janvier 2009. Durée de l'épreuve : 1 heure 30.

Il est interdit d'utiliser des calculatrices. Il est admis de consulter des notes personnelles qui tiennent sur une page recto-verso et les deux fiches distribuées en cours. Les téléphones portables doivent être éteints.

Exercice 1 Soit $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^2$ une fonction de deux variables.

1. Chercher les points critiques de f et donner leur nature.
2. La fonction f admet-elle des extrema globaux dans le plan ?

Exercice 2 Soit $\vec{V}(x,y) = 3x^2y\ \vec{i} + (x^3 - 2y)\ \vec{j}$ un champ de vecteurs dans le plan.

1. $\vec{V}$ est-il un champ de gradient ? Si oui, calculer son potentiel.
2. Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long du quart d'ellipse $C = \{x^2 + 2y^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ orientée dans le sens horaire.

Exercice 3 Soit $\vec{U}(x,y) = -xy\ \vec{i} + y\ \vec{j}$ un champ de vecteurs dans le plan.

1. Calculer la circulation de $\vec{U}$ le long du segment $\gamma_1 = \{(x,y),\ y = x, 0 \leq x \leq 1\}$ orienté dans le sens des x croissants.
2. Calculer la circulation de $\vec{U}$ le long de la courbe $\gamma_2 = \{(x,y),\ y = -x^2 + 2x, 0 \leq x \leq 1\}$ orientée dans le sens des x décroissants.
3. Soit D le domaine delimité par les courbes γ_1 et γ_2. Calculer l'intégrale double
$$I = \iint_D x\ dx\ dy.$$
4. On identifie le champ de vecteur $\vec{U}$ de $\mathbb{R}^2$ avec le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donné par $-xy\ \vec{i} + y\ \vec{j} + 0\ \vec{k}$, et le domaine D avec une surface de $\mathbb{R}^3$ contenue dans le plan xOy. Retrouver la valeur de I en utilisant la formule de Green-Riemann pour calculer le flux de $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{U}$ à travers D.