Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math 2**

CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 5

Vendredi 22 janvier 2010. Durée de l'épreuve : 2 heures.

Règlement – Il est interdit d'utiliser des calculatrices. Il est admis de consulter des notes personnelles qui tiennent sur une page recto-verso et les deux fiches distribuées en cours. Les téléphones portables doivent être éteints.

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormal direct $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les variables (x, y, z) indiquent les coordonnées cartesiennes des points et des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ par rapport à ce repère.

Exercice 1 – Soit $\vec{V}(x, y) = (2xy^2 - y)\ \vec{i} + (2x^2y - x)\ \vec{j}$ un champ de vecteurs dans le plan, qu'on regarde dans $\mathbb{R}^3$ en ajoutant une composante nulle dans la direction $\vec{k}$.

1. Calculer le rotationnel de V. Est-ce que $\vec{V}$ est un champ de gradient ? Si oui, calculer son potentiel.
2. Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long du demi-cercle $C = \{x^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0\}$ contenu dans le plan d'équation $z = 0$, orienté dans le sens horaire.
3. Calculer la divergence de $\vec{V}$. Est-ce que $\vec{V}$ est le rotationnel d'un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$?
4. Soit S le cube de $\mathbb{R}^3$ de cotés $[0, 1]$, orienté par les vecteurs normaux sortant du cube. Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers S en utilisant le théorème d'Ostrogradski.

Exercice 2 – Soit $\vec{U}(x, y, z) = xz\ \vec{i} + y^2\ \vec{j} + yz\ \vec{k}$ un champ de vecteurs de l'espace.

1. Dessiner la courbe orientée $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ de $\mathbb{R}^3$, où
   - $C_1 = \{(x, y, z),\ y = 0,\ z = x,\ 0 \leq x \leq 1\}$ est le segment orienté dans le sens des x croissants ;
   - $C_2 = \{(x, y, z),\ x = 1,\ z = 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ est le segment orienté dans le sens des y croissants ;
   - $C_3 = \{(x, y, z),\ y = 1,\ z = x,\ 0 \leq x \leq 1\}$ est le segment orienté dans le sens des x décroissants ;
   - $C_4 = \{(x, y, z),\ x = 0,\ z = 0,\ 0 \leq y \leq 1\}$ est le segment orienté dans le sens des y décroissants.

   Calculer la circulation de $\vec{U}$ le long de C.
2. Soit S le rectangle plat de $\mathbb{R}^3$ ayant C comme bord, orienté par le vecteur normal $\vec{N} = (-1, 0, 1)$. Calculer le flux de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$ à travers S en utilisant le théorème de Stokes.