Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math 2**

CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 5 – 21 janvier 2011

Règlement – L'épreuve dure 1 heure et trente minutes. Il est interdit d'utiliser des calculatrices. Il est admis de consulter des notes personnelles qui tiennent sur une page recto-verso et les deux fiches distribuées en cours. Les téléphones portables doivent être éteints.

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormal direct $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les variables (x, y, z) indiquent les coordonnées cartesiennes des points et des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ par rapport à ce repère.

Exercice 1 – Soit $\vec{V}(x, y) = y\ \vec{i} + (x + \cos y)\ \vec{j}$ un champ de vecteurs dans le plan, qu'on regarde dans $\mathbb{R}^3$ en ajoutant une composante nulle dans la direction $\vec{k}$.

1. Calculer le rotationnel de V. Est-ce que $\vec{V}$ est un champ de gradient ? Si oui, calculer son potentiel.
2. Calculer la circulation de $\vec{V}$ entre le point $A = (0, 0, 0)$ et le point $B = (1, \frac{\pi}{2}, 0)$ le long du segment de droite $y = \frac{\pi}{2}x$ contenue dans le plan d'équation $z = 0$, illustré dans la figure 1.
3. Calculer la divergence de $\vec{V}$. Est-ce que $\vec{V}$ est le rotationnel d'un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$?
4. Soit S le cube de $\mathbb{R}^3$ de cotés $[0, \frac{\pi}{2}]$, orienté par les vecteurs normaux sortant du cube, comme dans la figure 2. Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers S en utilisant le théorème d'Ostrogradski.

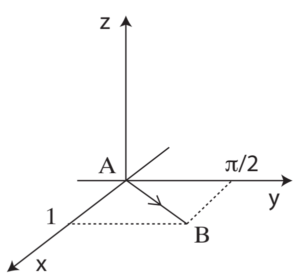

Figure 1

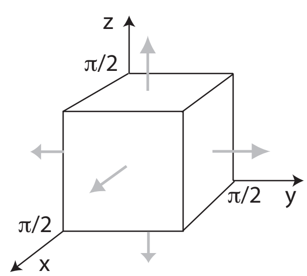

Figure 2

Exercice 2 – Soit $\vec{U}(x, y, z) = x^2\ \vec{i} + xz\ \vec{j} + yz\ \vec{k}$ un champ de vecteurs de l'espace.

1. Dessiner la courbe orientée $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ de $\mathbb{R}^3$, où
   - $C_1 = \{(x, y, z),\ y = 0,\ z = 0,\ 0 \leq x \leq 1\}$ est le segment orienté dans le sens des x croissants ;
   - $C_2 = \{(x, y, z),\ x = 1,\ z = y,\ 0 \leq y \leq 1\}$ est le segment orienté dans le sens des y croissants ;
   - $C_3 = \{(x, y, z),\ y = 1,\ z = 1,\ 0 \leq x \leq 1\}$ est le segment orienté dans le sens des x décroissants ;
   - $C_4 = \{(x, y, z),\ x = 0,\ z = y,\ 0 \leq y \leq 1\}$ est le segment orienté dans le sens des y décroissants.

   Calculer la circulation de $\vec{U}$ le long de C.
2. Soit S le rectangle plat de $\mathbb{R}^3$ ayant C comme bord, orienté par le vecteur normal $\vec{N} = (0, -1, 1)$. Calculer le flux de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$ à travers S en utilisant le théorème de Stokes.