Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math 2**

CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 2 – Jeudi 10 novembre 2011

Règlement – L'épreuve dure 45 minutes. Il est interdit d'utiliser des calculatrices et de consulter des notes. Les téléphones portables doivent être éteints. Entre parenthèses est indiqué le barème sur 20 points.

Exercice 1 – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = e^{x^3+y-xy}$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer le gradient de f en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$. [1 point]
2. Ecrire la differentielle de f au point $(-1,1)$. [2 points]
3. Calculer la Hessienne de f en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$. [3 points]
4. Trouver les points critiques de f. [2 points]
5. Trouver la nature des points critiques (points de minimum ou maximum local, ou points col). [3 points]
6. Ecrire le dévéloppement de Taylor de f à l'ordre 2 autour du point $(0,0)$. [2 points]
7. Ecrire le dévéloppement de Taylor de f à l'ordre 2 autour du point $(1,3)$. [2 points]

Exercice 2 – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = xy$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer les dérivées partielles de f en (x,y). [0.5 points]

2. Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (u,v) \longmapsto h(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$ une fonction différentiable (qui represente un *changement de coordonnées*), et soit $F = f \circ h$ l'expression de f dans les variables (u,v), c'est-à-dire $F(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

   Calculer les dérivées partielles de F par rapport aux variables u et v. [3 points]

3. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto g(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ une fonction différentiable (qui represente une *paramétrisation des coordonnées*), et soit $F = f \circ g$ l'expression de f dans la variable t, c'est-à-dire $F(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   Calculer la dérivée de F par rapport à t. [1.5 points]