CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 5 – 18 janvier 2013

Règlement – L'épreuve dure 1 heure et 30 minutes. Les téléphones portables doivent être éteints.

Il est interdit d'utiliser des calculatrices. Il est admis de consulter des notes personnelles qui tiennent sur une page recto-verso et les deux fiches distribuées en cours.

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé direct $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les variables (x, y, z) indiquent les coordonnées cartésiennes des points de $\mathbb{R}^3$ par rapport à ce repère.

Exercice 1 [5 pts] – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = x^3 - y^2 - 3x$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Trouver les points critiques de f et déterminer leur nature.

Exercice 2 [15 pts] – Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, soient

$$\begin{array}{rl} D_1 & \text{le disque d'équation } x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\,; \\ D_2 & \text{le disque d'équation } x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 3\,; \\ S & \text{le tronc de cylindre d'équation } x^2 + y^2 = 1 \text{ avec } 0 \leq z \leq 3\,; \end{array}$$

et soit $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs défini par $\overrightarrow{V}(x, y, z) = y\,\vec{i} + x\,\vec{j} - 2z\,\vec{k}$.

1. Calculer le volume de l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ délimité par les trois surfaces D_1, D_2 et S.
2. Calculer la divergence de $\overrightarrow{V}$. Est-ce que $\overrightarrow{V}$ est le rotationnel d'un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$?
3. En utilisant la formule d'Ostrogradski, calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers la surface fermée $\Sigma = D_1 \cup D_2 \cup S$.
4. On oriente D_1 de telle sorte que son vecteur normal soit dirigé vers le bas. Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers D_1.
5. On oriente D_2 de telle sorte que son vecteur normal soit dirigé vers le haut. Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers D_2.
6. En déduire le flux de $\overrightarrow{V}$ sortant à travers la surface S.
7. On donne la paramétrisation suivante de S :

$$\sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v) \quad \text{avec} \quad 0 \leq u \leq 2\pi \quad \text{et} \quad 0 \leq v \leq 3.$$

   A l'aide de cette paramétrisation, calculer directement le flux de $\overrightarrow{V}$ sortant à travers la surface S et retrouver ainsi le résultat de la question 6.
8. Soit $\overrightarrow{W}$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{W} = -\dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{V}$. En utilisant la formule de Stokes, calculer la circulation de $\overrightarrow{W}$ le long du cercle orienté $\gamma = \partial D_2$.