Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math 2**

CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 2 – Lundi 17 mars 2014

Règlement – L'épreuve dure 1 heure.
Les calculatrices sont interdites. Il est admis de consulter les fiches distribuées en cours et des notes personnelles qui tiennent sur une page recto-verso. Les téléphones portables doivent être éteints. Entre parenthèses est indiqué le barème sur 20 points.

Exercice 1 [6 points] – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{y}{x}.$$

1. Trouver le domaine D_f de cette fonction. [1 point]
2. Trouver les lignes de niveau $L_k(f)$, pour tout $k \in \mathbb{R}$, et dessiner les lignes de niveau -1, 0, 1 et 2. [2 points]
3. Calculer le gradient de f en tout point (x,y) de D_f et dessiner (sur le même dessin) les gradients aux points $(1,-1)$, $(1,0)$ et $(1,1)$. [2 points]
4. Dessiner le graphe de la fonction f. [1 point]

Exercice 2 [9 points] – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^3 - xy}{y+1}.$$

1. Trouver le domaine D_f de cette fonction. [1 point]
2. Calculer le gradient de f en tout point (x,y) de D_f. [2 points]
3. Écrire la différentielle de f en tout point (x,y) de D_f. [1 point]
4. Écrire la différentielle de f au point $(1,0)$. [1 point]
5. Calculer la valeur de cette différentielle sur le vecteur $(2,4)$. [1 point]
6. Calculer la Hessienne de f en tout point (x,y). [3 points]

Exercice 3 [5 points] – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur le domaine $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\big\}$, avec dérivées partielles

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{y}.$$

1. Pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, soit $F(u,v) = f\big(3v+1, u^2 - v\big)$ l'expression de f dans les coordonnées u et v, obtenue en composant f avec le changement de coordonnées

   $$x(u,v) = 3v + 1 \qquad \text{et} \qquad y(u,v) = u^2 - v.$$

   Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial F(u,v)}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial F(u,v)}{\partial v}$ de F. [3 points]

2. Pour tout $t > 0$, soit $G(t) = f\left(t, \frac{1}{3t}\right)$ la restriction de f à la branche d'hyperbole paramétrée par $x(t) = t$ et $y(t) = \dfrac{1}{3t}$. Calculer la dérivée $G'(t)$ de G. [2 points]