CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 5 – Jeudi 5 juin 2014

Règlement – L'épreuve dure 2 heures. Les calculatrices sont interdites. Il est admis de consulter les fiches distribuées en cours et des notes personnelles qui tiennent sur une page recto-verso. Les téléphones portables doivent être éteints. Entre parenthèses est indiqué le barème sur 20 points.

Exercice 1 [**1 pt**] – Écrire la différentielle de la fonction $f(x,y) = \ln(x^2y^3)$ en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x > 0$ et $y > 0$.

Exercice 2 [**4 pts**] – Trouver les points critiques de la fonction $f(x,y) = x^3y - 6x^2 - 2y^2$ et, si possible, détérminer leur nature.

Exercice 3 [**3 pts**] – Dessiner l'arc d'hyperbole C^+ du plan d'équation cartésienne $y = \dfrac{2}{x} - 1$ allant du point $(2,0)$ au point $(1,1)$, et calculer la circulation du champ de vecteurs

$$\vec{V}(x,y) = xy\ \vec{i} + (x^2+1)\ \vec{j}$$

le long de C^+.

Exercice 4 [**1 pt**] – Calculer la circulation du champ gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$, où $f(x,y) = x^2 - y$, le long du segment de droite allant du point $(1,0)$ au point $(3,5)$.

Exercice 5 [**4 pts**] – Dessiner la portion S du paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ paramétrée par

$$f(r,\theta) = \big(r\cos\theta, r\sin\theta, r^2\big), \qquad r \in [0,1], \quad \theta \in [0,2\pi]$$

et orientée par le vecteur $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial r} \wedge \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial \theta}$, et calculer le flux du champ de vecteurs

$$\vec{V}(x,y,z) = y\ \vec{i} - x\ \vec{j} + z\ \vec{k}$$

à travers S.

Exercice 6 [**4 pts**] – Dessiner la demi-sphère

$$S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 4,\ 0 \leq z \leq 2\big\}$$

orientée par un vecteur normal sortant de la sphère, et calculer le flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{U}$, où

$$\vec{U}(x,y,z) = (x^2 - y^2)\ \vec{i} + 2xy\ \vec{j},$$

à travers S.

Exercice 7 [**3 pts**] – Dessiner un oeuf Ω de volume égal à 13 (orienté dans le sens sortant) et calculer le flux du champ de vecteurs (en coordonnées cylindriques)

$$\vec{V}(\rho,\theta,z) = \rho^2\ \vec{e_\theta} + (2z + \cos\theta)\ \vec{k}$$

à travers la coquille de l'oeuf.