Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math 2**

CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 5 – Mardi 31 mai 2016

Règlement – L'épreuve dure 2 heures. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Il est admis de consulter le formulaire distribué en cours et des notes personnelles qui tiennent sur une page recto-verso.

Les questions 1–5 ont une seule bonne réponse, qui vaut 1 point. **Indiquer les réponses par leur lettre correspondante, en indiquant bien la question (dans l'ordre 1 à 5), dans la prémière page de la copie d'examen.**

Pour les autres exercices, le barème est indiqué entre parenthèses et **la réponse doit être justifiée**.

Question 1 – La matrice Hessienne de la fonction $P(T,V) = \dfrac{nRT}{V}$ (gaz parfait) est

(a) $\begin{pmatrix} \dfrac{nR}{V} & -\dfrac{nRT}{V^2} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \dfrac{n}{V} & -\dfrac{nR}{V^2} \\ -\dfrac{nR}{V^2} & -\dfrac{nT}{V^2} \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{nR}{V^2} \\ -\dfrac{nR}{V^2} & \dfrac{2nRT}{V^3} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} \dfrac{nR}{V} \\ -\dfrac{nRT}{V^2} \\ \dfrac{nT}{V} \end{pmatrix}$

Question 2 – Pour le potentiel gravitationnel $\Phi(r,\varphi,\theta) = -\dfrac{GM}{r}$, le gradient (au sens physique : $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi$) vaut

(a) $\dfrac{GM\,\varphi}{r}\,\vec{e_r}$ (b) $\dfrac{GM}{r^2}\,\vec{e_r}$ (c) $\dfrac{GM}{r^2}\,\vec{e_\varphi}$ (d) $\dfrac{GM}{r^3\sin\varphi}\,\vec{e_\varphi}$

Question 3 – Pour le champ de vecteurs $\overrightarrow{A}(\rho,\varphi,z) = \sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \dfrac{z}{\rho}\,\vec{k}$, la divergence, $\operatorname{div}\overrightarrow{A}$, vaut

(a) $\dfrac{1}{\rho}$ (b) $\sin\varphi + \dfrac{z}{\rho}$ (c) $\sin\varphi - \dfrac{z}{\rho^2}$ (d) $\dfrac{\sin\varphi + 1}{\rho}$

Question 4 – La circulation du champ électrostatique $\overrightarrow{E}(r,\varphi,\theta) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon}\dfrac{1}{r^2}\,\vec{e_r}$ le long d'un cercle γ de rayon R, centré à l'origine dans le plan xOy, vaut

(a) 0 (b) $\dfrac{Q}{4\pi\epsilon}$ (c) $\dfrac{QR}{4\epsilon}$ (d) $\dfrac{Q}{4\pi\epsilon R}$

Question 5 – Le flux d'un champ $\overrightarrow{B}$ à divergence nulle sur tout $\mathbb{R}^3$, à travers une surface fermée S qui entoure un solide de volume $3\pi R^3$, vaut

(a) 0 (b) $3\pi R^3$ (c) $\dfrac{3}{4}\pi R^3$ (d) calcul impossible

---

Exercice 1 **[3.5 pts]** – Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 au point $(0,0)$ de la fonction

$$f(x,y) = \frac{e^{3x}}{2y+1}.$$

Exercice 2 **[3.5 pts]** – Considérons une feuille d'aluminium en forme de demi-disque D^+ donné par $0 \le \rho \le 1$ et $0 \le \varphi \le \pi$, ayant densité de masse $\mu(x,y) = y$.

a) Dessiner le demi-disque sur le plan xOy.

b) Trouver la masse totale de la feuille d'aluminium.

c) Trouver le barycentre $G(x_G, y_G)$ de la feuille d'aluminium, en sachant que $\int \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)$.

Exercice 3 **[4 pts]** – Considérons le champ de vecteurs du plan

$$\overrightarrow{E}(x,y) = 2x \sin y \, \vec{\imath} + x^2 \cos y \, \vec{\jmath}.$$

a) Expliquer pourquoi le champ $\overrightarrow{E}$ est conservatif sur $\mathbb{R}^2$.

b) Trouver son potentiel scalaire f tel que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$.

c) Calculer la circulation de $\overrightarrow{E}$ le long d'une courbe γ qui joigne le point $A(1,0)$ au point $B(5, \pi/2)$.

Exercice 4 **[4 pts]** – Calculer le flux du champ de vecteurs

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = -x\,\vec{\jmath} + y^2\,\vec{k}$$

à travers la **surface de Gaudi** S paramétrée par

$$f(u,v) = (u, v, u\sin v), \qquad u \in [0,1], \quad v \in [0, \pi/2].$$