Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math 2**

EXAMEN FINAL 1ère SESSION – Jeudi 11 mai 2017

Règlement – L'épreuve dure 2 heures. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Il est admis de consulter le formulaire distribué en cours et des notes personnelles qui tiennent sur une page recto-verso.

Les questions 1–5 ont une seule bonne réponse, qui vaut 1 point. **Indiquer les réponses par leur lettre correspondante, en indiquant bien la question (dans l'ordre 1 à 5), dans la première page de la copie d'examen.**

Pour les autres exercices, le barème est indiqué entre parenthèses et **la réponse doit être justifiée**.

Question 1 – Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables, avec dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
La dérivée $\dfrac{dF}{dt}(t)$ de la fonction $F(t) = f\big(t^2, t^3\big)$ se calcule comme

(a) $t^2\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+t^3\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ (b) $2t\,\dfrac{\partial f}{\partial t}(t)+3t^2\,\dfrac{\partial f}{\partial t}(t)$ (c) $2t\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2,t^3)+3t^2\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(t^2,t^3)$ (d) $\begin{pmatrix} 2t\,\frac{\partial f}{\partial x}(t^2,t^3) \\ 3t^2\,\frac{\partial f}{\partial y}(t^2,t^3) \end{pmatrix}$

Question 2 – La matrice Hessienne de la fonction $u(t,\omega) = t\,e^{t\omega}$ est

(a) $\begin{pmatrix} (t\omega^2+2\omega)\,e^{t\omega} & (t^2\omega+2t)\,e^{t\omega} \\ (t^2\omega+2t)\,e^{t\omega} & t^3\,e^{t\omega} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \omega^2\,e^{t\omega} & t^2\,e^{t\omega} \\ t^2\,e^{t\omega} & t^2\omega\,e^{t\omega} \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} (t\omega+1)\,e^{t\omega} \\ t^2\,e^{t\omega} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} t\omega\,e^{t\omega} & t^2\,e^{t\omega} \end{pmatrix}$

Question 3 – Parmi les champs ci-dessous, lequel est central (c.-à.-d. possède une symétrie centrale) ?

(a) $\sin(xyz)\,\vec{k}$ (b) $y\,\vec{\imath} + z\,\vec{\jmath} + x\,\vec{k}$ (c) $(r^3+1)\,\vec{e_r}$ (d) $\sin\varphi\,\vec{e_r}$

Question 4 – La divergence div $\vec{E}$ du champ de vecteurs $\vec{E}(r,\varphi,\theta) = r\sin\varphi\;\vec{e_\theta}$ vaut

(a) $r\sin\varphi\cos\theta$ (b) $\sin\varphi$ (c) $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ (d) $\sin\varphi\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

Question 5 – Le rotationnel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ du champ de vecteurs $\vec{A}(\rho,\varphi,z) = \rho^2\sin\varphi\,\vec{k}$ vaut

(a) $\rho^2\cos\varphi\,\vec{e_\rho} - 2\rho\sin\varphi\,\vec{e_\varphi}$ (b) $\rho\cos\varphi\,\vec{e_\rho} - 2\rho\sin\varphi\,\vec{e_\varphi}$ (c) $\big(3\rho\sin\varphi - \rho\cos\varphi\big)\,\vec{k}$ (d) $\vec{0}$

Exercice 1 [3.5 pts] – Chercher le ou les points critiques de la fonction

$$f(x,y) = 5x^2 + 6xy + 2y^2 + 2x + 2y + 1$$

et déterminer leur nature.

Exercice 2 [3.5 pts] – On considère un rectangle de matière $D = [-1,1] \times [0,1]$ ayant pour densité de masse $\mu(x,y) = (x^2+1)e^y$.

a) Trouver la masse totale du rectangle de matière.

b) Trouver le barycentre $G(x_G, y_G)$ du rectangle de matière. *Suggestion.*– Lors du calcul de y_G on pourra utiliser une intégration par partie pour traiter le facteur ye^y.

c) On découpe le rectangle en deux morceaux le long de la parabole $y = x^2$. Quelle est l'aire de chacun des morceaux ?

Exercice 3 [4 pts] – Considérons le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivant

$$\overrightarrow{E}(x,y) = \cos x \sin y\, \vec{\imath} + \sin x \cos y\, \vec{\jmath}.$$

a) Expliquer pourquoi le champ $\overrightarrow{E}$ est conservatif sur $\mathbb{R}^2$.

b) Trouver un potentiel scalaire f tel que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$.

c) Calculer la circulation de $\overrightarrow{E}$ le long d'une courbe γ joignant le point $A(0,0)$ au point $B(\pi/4, \pi/2)$.

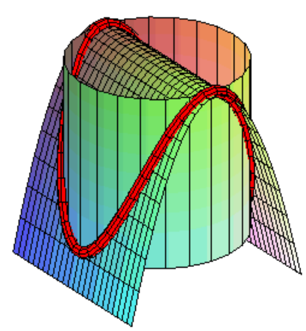
Exercice 4 [4 pts] – Considérons le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\overrightarrow{B}(x,y,z) = (z-y)\,\vec{\imath} + (x^2-1)\,\vec{\jmath} - x\,\vec{k}$$

et la courbe paramétrée

$$\gamma(t) = \big(\cos t, \sin t, \sin t \cos t\big), \quad t \in [0, 2\pi]$$

dessinée ci-contre, qu'on appelle **courbe de la crêpe** parce qu'elle ressemble au bord d'une crêpe qu'on soulève avec une spatule.



a) Calculer le vecteur vitesse $\gamma'(t)$ de la courbe.

b) Calculer la valeur $\overrightarrow{B}\big(\gamma(t)\big)$ du champ de vecteurs sur les points de la courbe.

c) Calculer la circulation de $\overrightarrow{B}$ le long de γ, en sachant que $\int \sin^2 t\, dt = \frac{1}{2}(t - \sin t \cos t)$.