Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math 2**

EXAMEN FINAL 1ère SESSION – Jeudi 17 mai 2018

Règlement – L'épreuve dure 2 heures. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Il est admis de consulter le formulaire distribué en cours et des notes personnelles qui tiennent sur une page recto-verso.

Les questions 1–5 ont une seule bonne réponse, qui vaut 1 point. **Indiquer les réponses par leur lettre correspondante, en indiquant bien la question (dans l'ordre 1 à 5), dans la première page de la copie d'examen.**

Pour les autres exercices, le barème est indiqué entre parenthèses et **la réponse doit être justifiée**.

Question 1 – Soit $g : \mathbb{R}^2 \to]0, \infty[$ une fonction différentiable. Le gradient de la fonction $G(x, y) = \ln(g(x, y))$ est

(a) $\ln\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)$ (b) $\dfrac{1}{g(x, y)}\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)$ (c) $\dfrac{1}{g(x, y)}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g(x, y)$ (d) $\ln\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g(x, y)\right)$

Question 2 – La matrice Hessienne de la fonction $\Phi(t, x) = e^{t\,(x+1)}$ est

(a) $e^{t\,(x+1)}\begin{pmatrix} (x+1)^2 & tx+t+1 \\ tx+t+1 & t^2 \end{pmatrix}$ (b) $e^{t\,(x+1)}\begin{pmatrix} x^2 & tx+1 \\ tx+1 & t^2 \end{pmatrix}$ (c) $e^{t\,(x+1)}\begin{pmatrix} x+1 \\ t \end{pmatrix}$ (d) $e^{t\,(x+1)}\begin{pmatrix} 0 & tx \\ tx & 0 \end{pmatrix}$

Question 3 – Pour la fonction $f(x, y) = x(1 - y^2)$, le point $(1, 1)$ est

(a) un extremum local (b) un point col (c) un point plat (d) n'est pas un point critique

---

Question 4 – La divergence div $\vec{A}$ du champ de vecteurs $\vec{A}(\rho, \varphi, z) = \sin\varphi\ \vec{e_\rho}$ vaut

(a) $\dfrac{1}{\rho}\cos\varphi$ (b) $\dfrac{1}{\rho}\sin\varphi$ (c) $\cos\varphi$ (d) $\sin\varphi$

Question 5 – Le rotationnel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}$ du champ de vecteurs $\vec{E}(r, \varphi, \theta) = r\,\vec{e_\varphi}$ vaut

(a) $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\vec{e_r} - 2\,\vec{e_\theta}$ (b) $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\vec{e_r} + 2\,\vec{e_\theta}$ (c) $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\vec{e_r} - \vec{e_\theta}$ (d) $\dfrac{1}{r}\,\vec{e_r} - \dfrac{1}{r}\,\vec{e_\theta}$

Exercice 1 [2 pts] – Calculer le Laplacien de la fonction

$$u(x,t) = x\,\sin(xt).$$

Exercice 2 [5 pts] – On considère le cylindre plein

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 3\}$$

ayant pour densité de masse

$$\mu(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z+1}.$$

a) Écrire la définition de Ω et la densité de masse μ en coordonnées cylindriques.
b) Trouver la masse totale du cylindre.
c) Trouver le centre de masse $G(x_G, y_G, z_G)$ du cylindre.

Exercice 3 [4 pts] – Considérons le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\overrightarrow{E}(x,y) = 2xz\,\vec{\imath} + \ln z\,\vec{\jmath} + \left(x^2 + \frac{y}{z}\right)\,\vec{k},$$

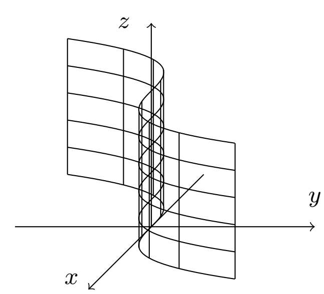
défini sur $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$.
a) Expliquer pourquoi le champ $\overrightarrow{E}$ est conservatif sur D (c.-à.-d. qu'il est un champ de gradient sur D).
b) Trouver un potentiel scalaire $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$.
c) Calculer la circulation de $\overrightarrow{E}$ le long du cercle paramétré par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ avec $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 4 [4 pts] – Calculer le flux du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + xz\,\vec{\jmath} + x^2y\,\vec{k}$$

à travers l'écran vertical S paramétré par

$$f(u,v) = (u, u^3, v), \qquad u \in [-1,1],\ v \in [0,1].$$



Exercice 5 [2 pts] – Calculer le flux du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\overrightarrow{B}(x,y,z) = y^2\,\vec{\imath} - x^3z\,\vec{\jmath} + y\,\vec{k}$$

à travers la sphère S centrée en l'origine de rayon 500.