

Math2 – Chapitre 2

Dérivées, Taylor, extrema locaux

Dans ce chapitre:

2.1 – Limites et continuité

2.2 – Dérivées partielles

2.3 – Dérivée directionnelle

2.4 – Gradient

2.5 – Différentielle

2.6 – Jacobienne

2.7 – Résumé sur les dérivées

2.8 – Règle de la chaîne

2.9 – Hessienne

2.10 – Taylor

2.11 – Extrema locaux

2.1 – Limites et continuité

Dans cette section:

- Rappels sur les fonctions d'une variable
- Limites de fonctions
- Fonctions continues

Rappels sur les fonctions d'une variable

Rappel – Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable, avec domaine D_f , on dit que:

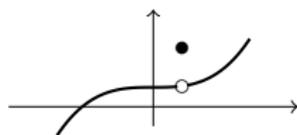
- la **limite de f en un point** $a \in D_f \cup \partial D_f$ est la valeur $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ à laquelle tend $f(x)$ quand x s'approche de a ;
- f est **continue** en un point $a \in D_f$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.



continue



$\lim_{\text{gauche}} \neq \lim_{\text{droite}}$



$\lim_{\text{gauche}} = \lim_{\text{droite}} \neq f(a)$

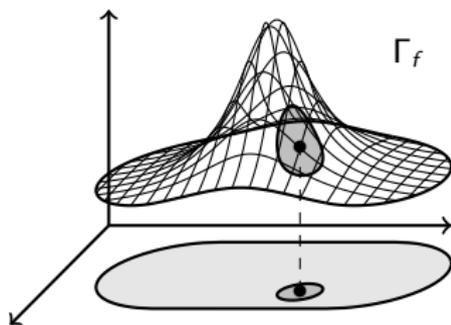
Limites des fonctions

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de plusieurs variables, de domaine D_f .

• La **limite de f en un point $\vec{a} \in D_f \cup \partial D_f$** est la valeur à laquelle tend $f(\vec{x})$ quand \vec{x} s'approche de \vec{a} par tous les chemins possibles dans D_f .

On la note

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}).$$



La limite peut ne pas exister, mais si elle existe elle est unique.

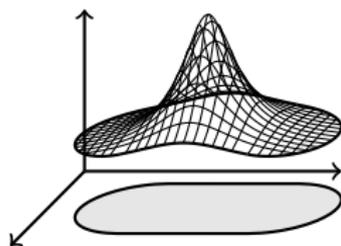
Fonctions continues

- La fonction f est **continue** en $\vec{a} \in D_f$ si

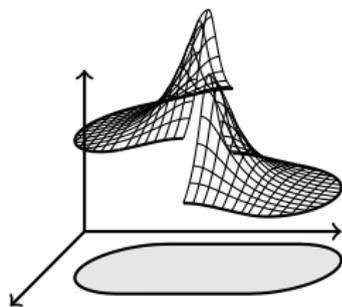
$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a}).$$

- La fonction f est **continue sur le sous-ensemble** $D \subset D_f$ si f est continue en tout point de D .

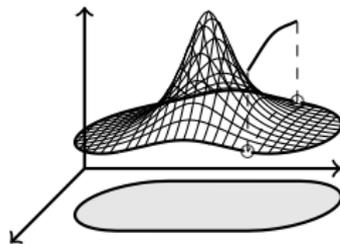
Le graphe d'une fonction continue n'a pas de "sauts" !



continue



non continue



non continue

Quelles fonctions sont-elles continues ?

Théorème – *Toutes les fonctions de plusieurs variables obtenues comme somme, produit ou composée de fonctions continues d'une variable sont continues.*

Quelques fonctions continues –

- Les fonctions polynomiales de plusieurs variables sont continues sur \mathbb{R}^n .
- Les fractions rationnelles, les racines, les exponentielles et les logarithmes, les fonctions circulaires, les fonctions hyperboliques et leurs réciproques sont continues sur leur domaine de définition.

2.2 – Dérivées partielles

Dans cette section:

- Rappels sur les fonctions d'une variable
- dérivées partielles
- fonctions (continûment) différentiables

Rappels sur les fonctions d'une variable

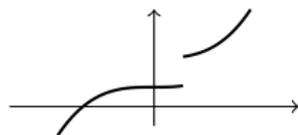
Rappel – Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable, la **dérivée** de f en $x \in D_f$ est la limite

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si elle existe et est finie. Dans ce cas, f est **dérivable en** x .
La fonction f est **dérivable sur** $D \subset D_f$ si elle est dérivable en tout point $x \in D$.

Propriété – *Une fonction dérivable est continue.*

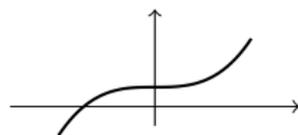
Le contraire est faux:



non continue



continue, non dérivable



dérivable

Dérivées partielles

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction.

- Les **dérivées partielles de f en $\vec{x} \in D_f$** sont les limites

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

pour $i = 1, \dots, n$ (si ces limites existent).

- Les **dérivées partielles de f** sont les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m : \vec{x} \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

définies sur l'ensemble de points \vec{x} où les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ existent.

Fonctions (continûment) différentiables

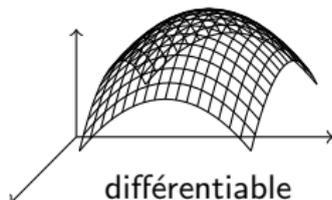
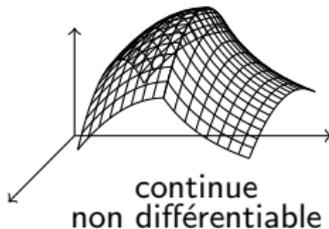
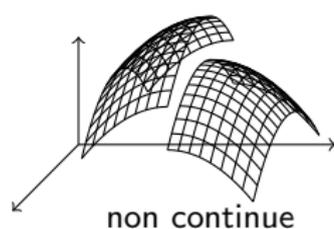
- La fonction f est **(continûment) différentiable sur** $D \subset D_f$, ou **de classe C^1 sur D** , si toutes les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

existent et sont des fonctions continues en tout point $\vec{x} \in D$.

Propriété – *Une fonction différentiable est continue.*

Le contraire est faux: le graphe d'une fonction différentiable n'a pas de "sauts" et en plus ne change pas son allure "brusquement"!



Exemples de fonctions différentiables

Exemples –

- Pour $f(x, y) = xy^2 + 3x$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 + 3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy$$

qui sont continues sur \mathbb{R}^2 , donc f est C^1 sur \mathbb{R}^2 .

- Pour $g(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2 + 3x \\ z^2 \end{pmatrix}$ on a

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} y^2 + 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \end{pmatrix}$$

donc g est C^1 sur \mathbb{R}^3 .

- Pour $h(r, \varphi, \theta) = \varphi^2 + r \sin \theta$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 2\varphi \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

donc h est C^1 sur $[0, \infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi]$.

2.3 – Dérivées directionnelles

Dans cette section:

- Dérivées directionnelles
- Croissance et décroissance des fonctions réelles

Dérivées directionnelles

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$.

Définition – Pour tout vecteur $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, on appelle **dérivée directionnelle de f dans la direction \vec{v}** la fonction

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{v}} f : D &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \vec{x} &\longmapsto \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) + \dots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{aligned}$$

Nota –

Dérivées partielles = dérivées directionnelles dans la direction des vecteurs

$$\vec{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0),$$

où 1 est en i ème position,

c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{\vec{e}_i} f.$$

Exemples de dérivées directionnelles

Exemples – Cherchons la dérivée directionnelle des fonctions suivantes, dans la direction d'un vecteur générique \vec{v} .

- $f(x, y) = xy^2 + 3x$

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 + 3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy.$$

Alors, pour tout vecteur de direction $\vec{v} = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, la dérivée directionnelle de f est la fonction

$$\partial_{\vec{v}} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui vaut, au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\partial_{\vec{v}} f(x, y) = (y^2 + 3)u + 2xyv.$$

Exemples (suite)

- $g(x, y, z) = (xy^2 + 3x, yz^2)$

La fonction $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a dérivées partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} y^2 + 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \begin{pmatrix} 2xy \\ z^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2yz \end{pmatrix}.$$

Pour tout $\vec{v} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée directionnelle

$\partial_{\vec{v}}g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vaut donc

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{v}}g(x, y, z) &= \begin{pmatrix} y^2 + 3 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 2xy \\ z^2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 2yz \end{pmatrix} w \\ &= \begin{pmatrix} (y^2 + 3)u + 2xy v \\ z^2 v + 2yz w \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

À noter que si on écrit $g = (g_1, g_2)$, on a

$$\partial_{\vec{v}}g = (\partial_{\vec{v}}g_1, \partial_{\vec{v}}g_2) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Exemples (suite)

- $h(r, \varphi, \theta) = \varphi^2 + r \sin \theta$

La fonction $h : [0, \infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ a dérivées partielles

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial h}{\partial \varphi} = 2\varphi \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial \theta} = r \cos \theta,$$

donc pour tout $\vec{v} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée directionnelle de h est la fonction

$$\partial_{\vec{v}} h : [0, \infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui vaut

$$\partial_{\vec{v}} h(r, \varphi, \theta) = \sin \theta u + 2\varphi v + r \cos \theta w.$$

Croissance et décroissance des fonctions réelles

Théorème – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de classe C^1 sur $D \subset \mathbb{R}^n$. Pour tout $\vec{x} \in D$ et tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, on a :

- Si $\partial_{\vec{v}}f(\vec{x}) > 0$ alors f est croissante au point \vec{x} dans la direction de \vec{v} .
- Si $\partial_{\vec{v}}f(\vec{x}) < 0$ alors f est décroissante au point \vec{x} dans la direction de \vec{v} .

De plus:

- forte croissance \iff grande dérivée positive
- forte décroissance \iff grande dérivée négative

Nota – On ne peut rien dire sur la croissance de f si $\partial_{\vec{v}}f(\vec{x}) = 0$!

Exercice

Énoncé – La fonction $f(x, y) = xy^2 + 3x$ est-elle croissante ou décroissante au point $(3, 1)$, dans les directions $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, -1)$ et $(1, -2)$?

Réponse – Pour tout vecteur $\vec{v} = (u, v)$, on a

$$\partial_{\vec{v}}f(x, y) = (y^2 + 3)u + 2xyv$$

et donc

$$\partial_{\vec{v}}f(3, 1) = 4u + 6v$$

d'où

- $\partial_{(1,1)}f(3, 1) = 10 \Rightarrow f$ croissante en direction $(1, 1)$
- $\partial_{(1,2)}f(3, 1) = 16 \Rightarrow f$ croissante en direction $(1, 2)$
- $\partial_{(1,-1)}f(3, 1) = -2 \Rightarrow f$ décroissante en dir. $(1, -1)$
- $\partial_{(1,-2)}f(3, 1) = -8 \Rightarrow f$ décroissante en dir. $(1, -2)$

Exercice

Énoncé (suite) – Parmi ces quatre directions, quelle est celle de plus forte croissance et celle de plus forte décroissance ?

Réponse – Pour comparer la croissance d'une fonction en différentes directions, il faut calculer les différentes dérivées directionnelles avec des vecteurs ayant tous la même longueur, par exemple 1.

Directions croissantes –

$$\bullet \|(1, 1)\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)} f(3, 1) = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

$$\bullet \|(1, 2)\| = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)} f(3, 1) = \frac{16}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Or } \frac{10}{\sqrt{2}} < \frac{16}{\sqrt{5}} \quad \text{car} \quad (10\sqrt{5})^2 = 500 < (16\sqrt{2})^2 = 512.$$

Ainsi, au point $(3, 1)$, le fonction f croit plus rapidement dans la direction $(1, 2)$.

Exercice

Directions décroissantes –

$$\bullet \|(1, -1)\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)} f(3, 1) = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\bullet \|(1, -2)\| = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)} f(3, 1) = -\frac{8}{\sqrt{5}}$$

On a $-\frac{2}{\sqrt{2}} > -\frac{8}{\sqrt{5}}$ car ceci se vérifie ssi $\frac{2}{\sqrt{2}} < \frac{8}{\sqrt{5}}$,

ce qui est vrai car $(2\sqrt{5})^2 = 20 < (8\sqrt{2})^2 = 128$.

Ainsi, au point $(3, 1)$, le fonction f décroît plus rapidement dans la direction $(1, -2)$.

2.4 – Gradient

Dans cette section:

- Gradient des fonctions réelles
- Interprétation géométrique du gradient

Gradient d'une fonction réelle

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle différentiable sur $D \subset D_f$.

- Le **gradient de f en un point $\vec{x} \in D$** est le vecteur de \mathbb{R}^n

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla} f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \vec{e}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \vec{e}_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

où le symbole $\vec{\nabla}$ se lit **nabla**.

- Le **gradient de f** est la fonction vectorielle

$$\overrightarrow{\text{grad}} f \equiv \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ on a alors

$$\partial_{\vec{v}} f = \langle \vec{\nabla} f, \vec{v} \rangle = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v}$$

Exemples de gradient

Exemples –

$$\bullet f(x, y) = xy^2 + 3x \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 + 3 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

$$\text{Par exemple: } \vec{\nabla}f(0, 0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla}f(3, 2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet f(x, y, z) = \sin(xy) + \ln(x^2 + z^2) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \cos(xy) + \frac{2x}{x^2+z^2} \\ x \cos(xy) \\ \frac{2z}{x^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Par exemple: } \vec{\nabla}f(0, \pi, 1) = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Interprétation géométrique du gradient

Théorème – Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, différentiable sur $D \subset \mathbb{R}^2$. Pour tout $\vec{x} \in D$ on a alors:

- Le gradient $\vec{\nabla}f(\vec{x})$ est orthogonal à la ligne de niveau $L_a(f)$ avec $a = f(\vec{x})$.
- Le gradient $\vec{\nabla}f(\vec{x})$ indique la direction de la pente de plus forte croissante du graphe Γ_f en \vec{x} .

Exemple: interpretation géométrique du gradient

Exemple - $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \implies$

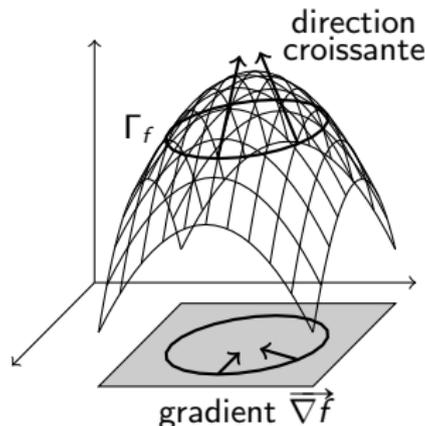
domaine $D_f = \overline{D}_O(1) =$ disque unitaire fermé

ligne de niveau $L_a(f) =$ cercle de rayon $\sqrt{1 - a^2}$, où $a \in [0, 1]$

f est différentiable sur $D = D_O(1) =$ disque unitaire ouvert, et

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{a}(x, y).$$

Pour tout $a \in]0, 1[$, ce vecteur est orthogonal au cercle $L_a(f)$ au point (x, y) et est dirigé vers le centre du cercle.



2.5 – Différentielle

Dans cette section:

- Différentielle des fonctions
- Différentielle des fonctions réelles: dx , dy et dz
- Différentielle des coordonnées cylindriques et sphériques: $d\rho$, $d\varphi$, dr et $d\theta$

Différentielle d'une fonction en un point

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable sur l'ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$. Par définition, pour tout $\vec{x} \in D$, l'application

$$\begin{aligned} \partial_{\bullet} f(\vec{x}) : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \vec{v} &\longmapsto \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) v_n \end{aligned}$$

est linéaire dans la variable \vec{v} .

Définition – Cette application linéaire de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^m s'appelle **différentielle de f au point \vec{x}** .

Il est d'usage de la noter $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

En somme, pour tout $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, on a donc

$$df_{\vec{x}}(\vec{v}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) v_n = \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}).$$

Différentielle en un point: cas particuliers

Cas particuliers –

- Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle, la différentielle $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit au moyen du gradient de f :

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \quad df_x(\vec{v}) = \langle \vec{\nabla} f(x), \vec{v} \rangle$$

- Si $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction d'une seule variable x , la différentielle $df_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vaut:

$$\forall v \in \mathbb{R}, \quad df_x(v) = \left(f'_1(x) v, \dots, f'_m(x) v \right)$$

Exemples de différentielles

Exemples –

- $f(x) = x^2 - x^5 \Rightarrow f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow df_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $df_x(v) = (2x - 5x^4)v$.

- $f(x, y) = x^2y^3 - 7y \Rightarrow f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$df_{(x,y)}(u, v) = 2xy^3 u + (3x^2y^2 - 7)v.$$

Par exemple:

$$df_{(x,y)}(2, 1) = 4xy^3 + 3x^2y^2 - 7$$

$$df_{(1,1)}(u, v) = 2u - 4v$$

$$df_{(1,1)}(2, 1) = 0 \quad (\text{quelle coïncidence !})$$

Exemples de différentielles (suite)

$$\bullet f(x, y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{array}$$

$$df_{(x,y)}(u, v) = u \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2xy \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 u + 2xy v \\ v \\ 2x u - 2y v \end{pmatrix}$$

$$\bullet f(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ yz^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ df_{(x,y,z)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} df_{(x,y,z)}(u, v, w) &= u \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2xy \\ z^3 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 3yz^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y^2 u + 2xy v \\ z^3 v + 3yz^2 w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Applications linéaires élémentaires

Remarque –

- Les n applications linéaires (pour $i = 1, \dots, n$)

$$dx_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \longmapsto dx_i(\vec{v}) = v_i$$

formant une *base* de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

- Par conséquent, toute application linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit comme *combinaison linéaire* des dx_j :

$$L = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n \quad \text{avec } a_i \in \mathbb{R}.$$

- Il n'y a pas n applications linéaires

$$"dx_i'' : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad (\text{pour } i = 1, \dots, n)$$

qui forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, parce que cet espace a dimension $n \times m$!

Différentielle

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable sur $D \subset \mathbb{R}^n$. L'application

$$\begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad ! \quad} & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ \vec{x} & \longmapsto & df_{\vec{x}} \end{array}$$

s'appelle **différentielle** de f et est notée df .

Corollaire – Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle, alors:

- La différentielle $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ en $\vec{x} \in D$ s'écrit

$$df_{\vec{x}} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) dx_n.$$

- La différentielle $df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ s'écrit

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Exemples: écriture usuelle des différentielles

Exemples –

- $f(x) = x^2 - x^5 \Rightarrow df_x = (2x - 5x^4) dx.$

Par exemple: $df_1 = -3 dx.$

- $f(x, y) = x^2y^3 - 7y \Rightarrow df_{(x,y)} = 2xy^3 dx + (3x^2y^2 - 7) dy.$

Par exemple: $df_{(1,1)} = 2 dx - 4 dy.$

- $f(x, y, z) = x^2y^3z - 7yz^2 \Rightarrow$

$$df_{(x,y,z)} = 2xy^3z dx + (3x^2y^2z - 7z^2) dy + (x^2y^3 - 14yz) dz$$

Par exemple: $df_{(1,1,1)} = 2 dx - 4 dy - 13 dz$

Exercice

Énoncé – Pour la fonction $f(x, y) = \ln(1 - x^2 + 5y)$:

- 1) Déterminer l'ensemble D où f est différentiable.
- 2) Déterminer la différentielle en tout point $(x, y) \in D$.
- 3) Calculer $df_{(2,0)}$ en les vecteurs $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$, $\vec{v} = (1, 1)$ et $\vec{u} = (3, -3)$.

Réponse –

$$1) D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5} \right\}$$

portion du plan au-dessus de la parabole d'éq.

$$y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}$$

Exercice (suite)

2) Pour tout $(x, y) \in D$, on a

$$\begin{aligned}df_{(x,y)} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy \\ &= \frac{-2x}{1-x^2+5y} dx + \frac{5}{1-x^2+5y} dy\end{aligned}$$

3) Ainsi

$$df_{(2,0)} = \frac{-4}{1-4} dx + \frac{5}{1-4} dy = \frac{4}{3} dx - \frac{5}{3} dy$$

et

$$df_{(2,0)}(\vec{i}) = \frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = \frac{4}{3}$$

$$df_{(2,0)}(\vec{j}) = \frac{\partial f}{\partial y}(2, 0) = -\frac{5}{3}$$

$$df_{(2,0)}(\vec{v}) = df_{(2,0)}(1, 1) = \frac{4}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$df_{(2,0)}(\vec{u}) = df_{(2,0)}(3, -3) = \frac{4}{3} \cdot 3 - \frac{5}{3}(-3) = 4 + 5 = 9$$

Exercice : $dx, dy, dz, d\rho, d\varphi, dr$ et $d\theta$

Énoncé – On note (x, y, z) , (ρ, φ, z) et (r, φ, θ) les coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques des points de \mathbb{R}^3 . On rappelle que

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{array}{l} \rho \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\end{array}$$

et

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \begin{array}{l} r \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\\ \theta \in]0, \pi[\end{array}$$

Exercice (suite)

Montrer que

$$i) \left\{ \begin{array}{l} dx = \cos \varphi \, d\rho - \rho \sin \varphi \, d\varphi \\ dy = \sin \varphi \, d\rho + \rho \cos \varphi \, d\varphi \\ dz = dz \end{array} \right.$$

$$i') \left\{ \begin{array}{l} d\rho = \cos \varphi \, dx + \sin \varphi \, dy \\ \rho d\varphi = -\sin \varphi \, dx + \cos \varphi \, dy \\ dz = dz \end{array} \right.$$

Formules de passage *cartésiennes* \longleftrightarrow *cylindriques*

Exercice (suite)

$$ii) \left\{ \begin{array}{l} dx = \cos \varphi \sin \theta dr - r \sin \varphi \sin \theta d\varphi + r \cos \varphi \cos \theta d\theta \\ dy = \sin \varphi \sin \theta dr + r \cos \varphi \sin \theta d\varphi + r \sin \varphi \cos \theta d\theta \\ dz = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \end{array} \right.$$

$$ii') \left\{ \begin{array}{l} dr = \cos \varphi \sin \theta dx + \sin \varphi \sin \theta dy + \cos \theta dz \\ r \sin \theta d\varphi = -\sin \varphi dx + \cos \varphi dy \\ rd\theta = \cos \varphi \cos \theta dx + \sin \varphi \cos \theta dy + \sin \theta dz \end{array} \right.$$

Formules de passage *cartésiennes* \longleftrightarrow *sphériques*

Exercice (suite)

$$(iii) \left\{ \begin{array}{l} dr = \sin \theta d\rho + \cos \theta dz \\ d\varphi = d\varphi \\ rd\theta = \cos \theta d\rho - \sin \theta dz \end{array} \right.$$

$$(iii') \left\{ \begin{array}{l} d\rho = \sin \theta dr + \cos \theta d\theta \\ d\varphi = d\varphi \\ dz = r \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \end{array} \right.$$

Formules de passage *cylindriques* \longleftrightarrow *sphériques*

Exercice (suite et fin)

Réponse – Il suffit d'écrire les différentielles des applications de changement de variables. Par exemple la différentielle du changement de variables *cylindriques* \rightarrow *cartésiennes* donne les formules *i*):

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial z} dz \\ &= \cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial z} dz \\ &= \sin \varphi d\rho + \cos \varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial z}{\partial z} dz \\ &= dz \end{aligned}$$

Les formules *i'*) s'obtiennent en inversant le système *i*). On procède de la même façon pour les autres formules.

2.6 – Jacobienne

Dans cette section:

- Rappel sur les applications linéaires et les matrices
- Matrice Jacobienne et déterminant Jacobien
- Jacobien des changements de variables

Rappels sur les applications linéaires et les matrices

Rappel – Toute application linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se représente comme une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ (avec m lignes et n colonnes) telle que, pour tout $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} L(\vec{v}) &= A \vec{v} \quad (\text{produit matrice par vecteur}) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} v_1 + \cdots + a_{1n} v_n \\ \vdots \\ a_{m1} v_1 + \cdots + a_{mn} v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Matrice jacobienne

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction diff. sur D .

- La **matrice Jacobienne de f** est la matrice $J_f \in \mathcal{M}_{mn}$ associée à df , c'est à dire telle que

$$df_{\vec{x}}(\vec{v}) = J_f(\vec{x}) \vec{v} \quad \text{pour tout } \vec{x} \in D \text{ et tout } \vec{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Si (f_1, \dots, f_m) sont les composantes de f , on a alors

$$J_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}).$$

- Si la matrice Jacobienne est carrée ($n = m$), son déterminant $\text{Jac } f = \det J_f$ s'appelle **Jacobien de f** .

Exemples de matrices jacobiniennes

Exemples –

- Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y) = x^2y,$

on a

$$J_f(x, y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = (2xy \quad x^2) \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{R})$$

une matrice ligne.

- Si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (2t, t^3 + 1),$

on a

$$J_g(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$$

une matrice colonne, c'est-à-dire un vecteur.

Exemples de matrices jacobiennes

- Si $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(u, v) \mapsto h(u, v) = (h_1(u, v), h_2(u, v)) = (u^2v, 3u),$

on a

$$J_h(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2uv & u^2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$$

et

$$\text{Jac } h(u, v) = \frac{\partial h_1}{\partial u} \frac{\partial h_2}{\partial v} - \frac{\partial h_2}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial v} = -3u^2$$

- Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, z \mapsto g(z) = \sin z,$

on a

$$J_g(z) = \left(g'(z) \right) = \left(\cos z \right) \in \mathcal{M}_{11}(\mathbb{R})$$

et

$$\text{Jac } g(z) = g'(z) = \cos z \in \mathbb{R}$$

Exemples: Jacobien des changements de variables

- **Polaires :** $h(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$

$$J_h(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\text{Jac } h(\rho, \varphi) = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho$$

- **Cylindriques :** $h(\rho, \varphi, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$

$$J_h(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Jac } h(\rho, \varphi, z) = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho$$

Exemples: Jacobien des changements de variables

- **Sphériques** : $h(r, \varphi, \theta) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$

$$J_h(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Jac } h &= \cos \theta \left(-r^2 \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta - r^2 \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta \right) \\ &\quad - r \sin \theta \left(r \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + r \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \right) \\ &= -r^2 \sin \theta \cos^2 \theta - r^2 \sin^3 \theta \\ &= -r^2 \sin \theta \end{aligned}$$

Exercice

Énoncé – Calculer le gradient, la différentielle et la matrice jacobienne de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x, y, z) = z \sin(xy).$$

Réponse – On a

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \cos(xy) \\ xz \cos(xy) \\ \sin(xy) \end{pmatrix}$$

$$df_{(x,y,z)} = yz \cos(xy) dx + xz \cos(xy) dy + \sin(xy) dz$$

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \cos(xy) & xz \cos(xy) & \sin(xy) \end{pmatrix}$$

Exercice

Énoncé – Calculer la différentielle et la matrice Jacobienne de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \sin x \\ z \sin y \end{pmatrix}.$$

Réponse – Pour tout $\vec{v} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$df_{(x,y,z)}(u, v, w) = \begin{pmatrix} z \cos x \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ z \cos y \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} \sin x \\ \sin y \end{pmatrix} w$$

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & z \cos y & \sin y \end{pmatrix}$$

2.7 – Résumé sur les dérivées

Dans cette section:

- Résumé sur les dérivées des fonctions réelles
- Résumé sur les dérivées des fonctions vectorielles

Resumé: dérivées des fonctions réelles

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle diff. sur $D \subset \mathbb{R}^n$:

- **dérivées partielles**

= fonctions réelles

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

- **dérivées directionnelles**

= fonctions réelles

$$\partial_{\vec{v}} f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\partial_{\vec{v}} f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

- **gradient**

= fonction vectorielle

$$\vec{\nabla} f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- **différentielle**

= fonction à valeur applications linéaires

$$df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

- **Jacobienne**

= fonction à valeur matrices ligne

$$J_f : D \longrightarrow \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$$

$$J_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Resumé: dérivées des fonctions vectorielles

Si $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est fonction vectorielle diff. sur D :

- **dérivées partielles**

= fonctions vectorielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \right)$$

- **dérivées directionnelles**

= fonctions vectorielles

$$\partial_{\vec{v}} f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\partial_{\vec{v}} f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

- **gradient** “ $\vec{\nabla} f$ ” n'est pas défini

- **différentielle**

= fonction à valeur applications linéaires

$$df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

mais les “ dx_i ” n'existent pas

- **Jacobienne**

= fonction à valeur dans les matrices

$$J_f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$$

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

2.8 – Règle de la chaîne

Dans cette section:

- Dérivées de la somme et du produit de fonctions
- Dérivées de la composée de fonctions
- Transformation des dérivées partielles: $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \rho}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial}{\partial r}$
et $\frac{\partial}{\partial \theta}$

Dérivées de la somme de fonctions et du produit par scalaire

Proposition – Si $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont différentiables, on a :

•
$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n$$

Par conséquent $\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$ (si $m=1$),

$$d(f+g) = df + dg, \quad J_{f+g} = J_f + J_g$$

•
$$\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Par conséquent $\vec{\nabla}(\lambda f) = \lambda \vec{\nabla}f$ (si $m=1$),

$$d(\lambda f) = \lambda df, \quad J_{\lambda f} = \lambda J_f$$

Dérivées du produit de fonctions

Proposition – Si $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions réelles différentiables, on a la **règle de Leibniz**:

•
$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n$$

Par conséquent
$$\vec{\nabla}(fg) = (\vec{\nabla}f)g + f(\vec{\nabla}g),$$

$$d(fg) = (df)g + f(dg),$$

$$J_{fg} = (J_f)g + f(J_g)$$

Exemple : règle de Leibniz

Exemple – Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy^2 e^{xy}$. Le calcul de la différentielle de f peut se faire directement au moyen de la formule

$$d(xy^2 e^{xy}) = \frac{\partial(xy^2 e^{xy})}{\partial x} dx + \frac{\partial(xy^2 e^{xy})}{\partial y} dy$$

ou en passant par la règle de Leibniz

$$\begin{aligned}d(xy^2 e^{xy}) &= d(xy^2) e^{xy} + xy^2 d(e^{xy}) \\&= (y^2 dx + 2xy dy) e^{xy} \\&\quad + xy^2 (y e^{xy} dx + x e^{xy} dy) \\&= (y^2 + xy^3) e^{xy} dx + (2xy + x^2 y^2) e^{xy} dy\end{aligned}$$

Dérivées des fonctions composées

Proposition – *Pour deux fonctions*

$$f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{différentiable en } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$g = (g_1, \dots, g_p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p \quad \text{différentiable en } \vec{y} = f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$$

la composée $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en \vec{x} et on a la **règle de la chaîne** :

$$\bullet \quad \frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial g_j}{\partial y_1}(f(\vec{x})) \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\vec{x}) + \dots + \frac{\partial g_j}{\partial y_m}(f(\vec{x})) \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\vec{x})$$

pour tout $i = 1, \dots, n$ et tout $j = 1, \dots, p$.

Par conséquent, on a aussi :

$$d(g \circ f)_{\vec{x}} = dg_{f(\vec{x})} \circ df_{\vec{x}} \quad (\text{composition d'applications linéaires})$$

$$J_{g \circ f}(\vec{x}) = J_g(f(\vec{x})) \cdot J_f(\vec{x}) \quad (\text{produit de matrices})$$

Cas usuels de fonctions composées

- **Cas usuel 1** –

$$\text{Si } f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y) = z$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, z \mapsto g(z)$$

$$g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto g(f(x, y))$$

on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x, y) = \frac{dg}{dz}(f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(x, y) = \frac{dg}{dz}(f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{array} \right.$$

$$d(g \circ f)_{(x, y)} = \frac{dg}{dz}(f(x, y)) df_{(x, y)}$$

$$J_{g \circ f}(x, y) = \frac{dg}{dz}(f(x, y)) J_f(x, y)$$

Exercice: cas usuel 1

Énoncé – Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont on connaît

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 - 2y.$$

Pour $F(x,y) = \ln f(x,y)$, calculer $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$.

Réponse – Si on pose $g(z) = \ln z$, on a $F = g \circ f$ et donc

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{dg}{dz}(f(x,y)) \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{f(x,y)}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{dg}{dz}(f(x,y)) \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2 - 2y}{f(x,y)}$$

Cas usuels de fonctions composées

- **Cas usuel 2** –

$$\text{Si } f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$$

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \mapsto h(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

$$f \circ h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$$

on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(f \circ h)}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(h(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(h(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial(f \circ h)}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(h(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(h(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{array} \right.$$

$$d(f \circ h)_{(u, v)} = df_{h(u, v)} \circ dh_{(u, v)}$$

$$J_{f \circ h}(u, v) = J_f(h(u, v)) J_h(u, v)$$

Exercice: cas usuel 2

Énoncé – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont on connaît

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 - 2y.$$

Pour $G(u, v) = f(v, uv^2)$, calculer $\frac{\partial G}{\partial u}$ et $\frac{\partial G}{\partial v}$.

Réponse – Si on pose $h(u, v) = (v, uv^2) = (x, y)$, c. à d. $x = v$ et $y = uv^2$, on a $G = f \circ h$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(u,v)}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}(v, uv^2) \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(v, uv^2) \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ &= 2v uv^2 \cdot 0 + (v^2 - 2uv^2) \cdot v^2 \\ &= (1 - 2u)v^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(u,v)}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}(v, uv^2) \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(v, uv^2) \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ &= 2v uv^2 \cdot 1 + (v^2 - 2uv^2) \cdot 2uv \\ &= 4uv^2(v - u) \end{aligned}$$

Cas usuels de fonctions composées

- **Cas usuel 3** –

Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$f \circ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(x(t), y(t))$$

on a

$$\frac{d(f \circ \gamma)(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \dot{y}(t)$$

$$d(f \circ \gamma)_t = df_{\gamma(t)} \circ d\gamma_t$$

$$J_{f \circ \gamma}(t) = J_f(\gamma(t)) J_\gamma(t)$$

Exercice: cas usuel 3

Énoncé – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont on connaît

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 - 2y.$$

Pour $H(t) = f(t^2, 3t)$, calculer $\frac{dH(t)}{dt}$.

Réponse – Si on pose $\gamma(t) = (t^2, 3t) = (x, y)$,

c. à d. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 3t \end{cases}$, on a $H = f \circ \gamma$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{dH(t)}{dt} &= \frac{d(f \circ \gamma)(t)}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t) \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t) \dot{y}(t) \\ &= 2t^2 \cdot 3t \cdot 2t + (t^4 - 6t) \cdot 3 \\ &= 24t^4 - 18t \end{aligned}$$

Exercice

Énoncé – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x, y) = xy^2$.

1) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $g'(z) = \sqrt{z}$.

Calculer $\frac{\partial g(xy^2)}{\partial x}$ et $\frac{\partial g(xy^2)}{\partial y}$.

Réponse – On veut calculer les dérivées de $g \circ f$, donc on applique la règle de la chaîne:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(xy^2)}{\partial x} &= g'(xy^2) \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} \\ &= \sqrt{xy^2} y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(xy^2)}{\partial y} &= g'(xy^2) \frac{\partial(xy^2)}{\partial y} \\ &= \sqrt{xy^2} (x^2 - 2xy)\end{aligned}$$

Exercice (suite)

2) Soit $(x, y) = h(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ un changement de variables dont on connaît la matrice Jacobienne

$$J_h(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix},$$

et soit $\tilde{f} = f \circ h$. Calculer $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u, v)$.

Réponse – On applique la règle de la chaîne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(h(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(h(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ &= y(u, v)^2 \cdot 0 + 2x(u, v)y(u, v) v^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(h(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(h(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \\ &= y(u, v)^2 \cdot 1 + 2x(u, v)y(u, v) 2uv \end{aligned}$$

Exercice (suite)

Réponse (suite)–

En alternative, on peut passer par les matrices Jacobiennes.

Puisque

$$J_f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) = (y^2 \quad 2xy),$$

on a

$$\begin{aligned} J_{\tilde{f}}(u,v) &= J_f(h(u,v)) \cdot J_h(u,v) \\ &= (y(u,v)^2 \quad 2x(u,v)y(u,v)) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix} \\ &= (y^2 \cdot 0 + 2xy \cdot v^2 \quad y^2 \cdot 1 + 2xy \cdot 2uv) \\ &= (2v^2 x(u,v)y(u,v) \quad y(u,v)^2 + 4uv x(u,v)y(u,v)) \end{aligned}$$

Exercice (suite)

3) Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ une trajectoire dans \mathbb{R}^2 dépendante du paramètre t . Calculer la dérivée en t de la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$.

Réponse – On veut calculer la dérivée de la fonction $f \circ \gamma$, donc on applique la règle de la chaîne:

$$\begin{aligned}\frac{d f(x(t), y(t))}{d t} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \\ &= y(t)^2 \dot{x}(t) + 2 x(t) y(t) \dot{y}(t)\end{aligned}$$

Exercice : transformation des dérivées partielles

Énoncé – Soient (x, y, z) les coordonnées cartésiennes des points de \mathbb{R}^3 , (ρ, φ, z) les coordonnées cylindriques et (r, φ, θ) les coordonnées sphériques. On rappelle que

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \rho \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\\ \theta \in]0, \pi[\end{cases}$$

Montrer que les dérivées partielles $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$, $\left\{ \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ et $\left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\}$ satisfont aux formules suivantes :

Exercice (suite)

$$(i) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \rho} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right.$$

$$(i') \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \sin \varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \cos \varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right.$$

Exercise (suite)

$$(ii) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial r} = \cos \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right.$$

$$(ii') \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \cos \varphi \cos \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos \varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin \varphi \cos \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

Exercice (suite)

$$(iii) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial r} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \rho} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right.$$

$$(iii') \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \rho} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

Exercice (suite)

Réponse – Montrons (i). Pour cela on applique la règle de la chaîne à la composée $\tilde{f} = f \circ h$ où $(x, y, z) = h(\rho, \varphi, z)$ est le changement de variables des coordonnées cylindriques en coordonnées cartésiennes. On a alors:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ &= \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ &= -r \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}\end{aligned}$$

d'où suivent les formules (i). Les formules (i') en découlent par inversion du système.

Exercice (suite)

- Pour montrer les formules (ii), on applique cette méthode à la composée $\tilde{f} = f \circ h$ où $(x, y, z) = h(r, \varphi, \theta)$ est le changement de variables des coordonnées sphériques en coordonnées cartésiennes. On a alors:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \\ &= \cos \varphi \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \varphi \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial f}{\partial z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ &= -\rho \sin \varphi \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \rho \cos \varphi \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ &= r \cos \varphi \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \sin \varphi \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial z}\end{aligned}$$

- On inverse le système (ii) pour obtenir (ii').
- On combine les (i) à (ii') pour obtenir (iii) et (iii').

2.9 – Hessienne

Dans cette section:

- Dérivées d'ordre supérieur
- Théorème de Schwarz
- Matrice Hessienne
- Laplacien, fonctions harmoniques

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition – Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont à leur tour différentiables, on peut calculer leurs dérivées partielles.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les **dérivées partielles d'ordre k de f** sont les fonctions qu'on obtient en dérivant f successivement k fois:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}.$$

Par exemple, si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est fonction de (x, y) , on a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

- La fonction f est **de classe C^k** si ses dérivées d'ordre k existent et sont des fonctions continues. La fonction f est **lisse** ou **de classe C^∞** si elle est C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Théorème de Schwarz

Théorème – Si les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existent et sont continue en un point \vec{x} , pour tout $i, j = 1, \dots, n$, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}) \quad \text{pour tout } i \neq j.$$

Corollaire – Si f est une fonction de classe C^k (ou lisse), alors toutes ses dérivées mixtes jusqu'à l'ordre k (ou ∞) ayant le même nombre de dérivées en chaque x_i , coincident indépendamment de l'ordre dans lequel elles sont calculées.

Exemple : dérivées secondes

Exemple – $f(x, y) = x^3y^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^3y \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6xy^2 & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6x^2y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 6x^2y & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2x^3 \end{array} \right.$$

L'on constate que les dérivées partielles sont continues (donc f est de classe C^2) et que les dérivées mixtes sont identiques.

Exercice

Énoncé – Soient $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et soit $c \in \mathbb{R}^*$.
Montrer que la fonction $u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$ est solution de l'équation des ondes

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0} \quad \text{pour tout } (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Réponse – La fonction u est de classe C^2 car composée de fonctions C^2 . On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= F'(x - ct) \frac{\partial(x-ct)}{\partial x} + G'(x + ct) \frac{\partial(x+ct)}{\partial x} \\ &= F'(x - ct) + G'(x + ct) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= F'(x - ct) \frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + G'(x + ct) \frac{\partial(x+ct)}{\partial t} \\ &= -c F'(x - ct) + c G'(x + ct) \end{aligned}$$

Exercice (suite)

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= F''(x - ct) \frac{\partial(x-ct)}{\partial x} + G''(x + ct) \frac{\partial(x+ct)}{\partial x} \\ &= F''(x - ct) + G''(x + ct),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= -c F'(x - ct) \frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + c G'(x + ct) \frac{\partial(x+ct)}{\partial t} \\ &= (-c)^2 F''(x - ct) + c^2 G''(x + ct).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0.$$

Matrice Hessienne

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 en \vec{x} .

- La **matrice Hessienne** de f en \vec{x} est la matrice carrée de taille n contenant toutes les dérivées secondes de f en \vec{x} :

$$H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Cette matrice est symétrique par le théorème de Schwarz.

- Son déterminant s'appelle le **Hessien** de f

$$\text{Hess } f(\vec{x}) = \det H_f(\vec{x})$$

Exemple: matrice Hessienne

Exemple –

Pour $g(x, y, z) = x \sin y + y \sin z$, on a

$$\vec{\nabla}g(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin y \\ x \cos y + \sin z \\ y \cos z \end{pmatrix}$$

puis

$$H_g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y & 0 \\ \cos y & -x \sin y & \cos z \\ 0 & \cos z & -y \sin z \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} \det H_g(x, y, z) &= -\cos y \left(-y \cos y \sin z - 0 \right) \\ &= y \cos^2 y \sin z \end{aligned}$$

Exercice

Énoncé – Montrer que le Hessien de la fonction

$$f(x, y) = \sin(x - y)$$

est nul en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Réponse – On a

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x - y) \\ -\cos(x - y) \end{pmatrix}$$

puis

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x - y) & \sin(x - y) \\ \sin(x - y) & -\sin(x - y) \end{pmatrix}$$

d'où

$$\det H_f(x, y) = (-\sin(x - y))^2 - (\sin(x - y))^2 = 0$$

Laplacien

Définition – Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 au point $\vec{x} \in D$.

- Le **Laplacien** de f en \vec{x} est la trace de la matrice Hessienne $H_f(\vec{x})$:

$$\Delta f(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\vec{x})$$

- La fonction f est dite **harmonique** si

$$\Delta f(\vec{x}) = 0$$

en tout point $\vec{x} \in D$.

Interprétation géométrique du Laplacien

Proposition – Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Si

- C est un carré de taille $h \times h$ contenu dans D , et
- $\mu(f, C)$ est la valeur moyenne de f sur C ,

alors, pour tout point $(a, b) \in C$, on a

$$\mu(f, C) = f(a, b) + \frac{h^2}{24} \Delta f(a, b) + O(h^4)$$

N.B. Moyenne au Ch.3: $\mu(f, C) = \frac{1}{h^2} \iint_C f(x, y) dx dy$.

Remarque – Cela signifie que la différence $f(a, b) - \mu(f, C)$ est proportionnelle à $\Delta f(a, b)$, et que la constante de proportionnalité ne dépend que de la taille du carré où on calcule la moyenne $\mu(f, C)$.

Exercice

Énoncé – Trouver les valeurs de $c \in \mathbb{R}^*$ pour lesquelles la fonction $u(x, t) = x^2 - c^2 t^2$ est harmonique.

Réponse – On a

$$\vec{\nabla}u(x, t) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2c^2 t \end{pmatrix}$$

puis

$$H_u(x, t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2c^2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$\Delta u(x, t) = 2 - 2c^2,$$

donc $\Delta u(x, t) = 0$ si et seulement si $c = \pm 1$.

Exercice

Énoncé – Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $F(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

1) Déterminer le Laplacien de F en tout point $(x, y) \neq (0, 0)$.

Réponse – Il s'agit de calculer $\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.
En utilisant la règle de la chaîne on trouve:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(\sqrt{x^2 + y^2})}{\partial x} \\ &= f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} \\ &= f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial f(\sqrt{x^2 + y^2})}{\partial y} \\ &= f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.\end{aligned}$$

Exercice (suite)

Puis, en utilisant aussi la règle de Leibniz, on trouve:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(f'(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \\ &= \frac{\partial f'(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + f'(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \\ &= f''(\sqrt{x^2+y^2}) \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2 + f'(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \\ &= f''(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{x^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}},\end{aligned}$$

et de la même façon

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} = f''(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{y^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Exercice (suite)

On a donc

$$\begin{aligned}\Delta F(x, y) &= \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} \\ &= f''(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} + f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= f''(\sqrt{x^2 + y^2}) + f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.\end{aligned}$$

Énoncé (suite) –

2) Trouver les fonctions f telles que $\Delta F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Réponse – En termes de f , l'équation s'écrit

$$f''(\sqrt{x^2 + y^2}) + f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et dépend de la seule variable réelle $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$.

Exercice (suite)

- Finalement, on doit résoudre l'équation différentielle du 2ème ordre non homogène et à coefficients non constants

$$(E) \quad f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) = r$$

- Pour cela, on transforme (E) en un système d'équations différentielles du 1er ordre:

$$\begin{cases} f'(r) = g(r) & (E1) \\ g'(r) + \frac{1}{r} g(r) = r & (E2) \end{cases}$$

On trouve g avec (E2) puis on reporte dans (E1) et on trouve f .

- Les solutions de (E2) sont de la forme $g = g_0 + g_p$, où g_0 est la solution générale de l'équation homogène associée

$$(E2^*) \quad g_0'(r) + \frac{1}{r} g_0(r) = 0$$

et g_p est une solution particulière de (E2) obtenue par la méthode de la variation de la constante.

Exercice (suite)

- Explicitement, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(E2^*) \quad g_0(r) = \lambda e^{-\int \frac{1}{r} dr} = \lambda e^{-\ln r} = \lambda e^{\ln(\frac{1}{r})} = \frac{\lambda}{r}$$

- On pose $g_p(r) = \frac{\lambda(r)}{r}$, ce qui donne $g_p'(r) = \frac{\lambda'(r)}{r} - \frac{\lambda(r)}{r^2}$:

$$(E2) \quad g_p'(r) + \frac{1}{r} g_p(r) = r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda'(r)}{r} = r \quad \Leftrightarrow \quad \lambda'(r) = r^2$$

On peut choisir $\lambda(r) = \frac{r^3}{3}$, d'où $g_p(r) = \frac{r^2}{3}$.

- On a donc $g(r) = g_0(r) + g_p(r) = \frac{\lambda}{r} + \frac{r^2}{3}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Enfin, les solutions de (E) sont celles de (E1) :

$$(E1) \quad f'(r) = \frac{\lambda}{r} + \frac{r^2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad f(r) = \lambda \ln(r) + \frac{r^3}{9} + \mu$$

pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2.10 – Taylor

Dans cette section:

- Développement de Taylor
- Approximation et erreur relative

Théorème de Taylor

Théorème de Taylor –

Toute fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k autour d'un point \vec{a} peut être approximée en tout point \vec{x} proche de \vec{a} par un polynôme de degré k en $\vec{x} - \vec{a}$, appelé **polynôme de Taylor**, avec coefficients dépendant seulement des dérivées de f en \vec{a} .

Rappel – Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ qui contient a , alors pour tout $x \in I$ on a

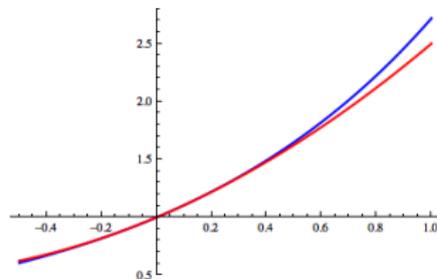
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + o((x - a)^2).$$

Par exemple, voici le graphe de

$$f(x) = e^x \quad (\text{en bleu})$$

et celui de son polynôme de Taylor de degré 2 en $a = 0$,

$$P(x) = 1 + x + x^2/2 \quad (\text{en rouge}).$$



Formule de Taylor en deux variables

Théorème de Taylor – Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un disque $D \subset \mathbb{R}^2$ qui contient un point (a, b) .

Alors, pour tout $(x, y) \in D$, on a

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}(y-b) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2}(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2}(y-b)^2 \\ & + o(\|(x-a, y-b)\|^2) \end{aligned}$$

où $o(h)$ est une fonction qui tend vers zéro plus vite de $h \rightarrow 0$.

Écritures alternatives:

$$\text{terme à l'ordre 1} = df_{(a,b)}(x-a, y-b) = J_f(a, b) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix},$$

$$\text{terme à l'ordre 2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-a & y-b \end{pmatrix} H_f(a, b) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}.$$

Exemple

Exemple – Soit $f(x, y) = \frac{x-1}{y-1}$ et $(a, b) = (0, 0)$.

On calcule $f(0, 0) = 1$, puis

$$J_f(x, y) = \left(\frac{1}{y-1} \quad -\frac{x-1}{(y-1)^2} \right) \quad \text{d'où} \quad J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{(y-1)^2} \\ -\frac{1}{(y-1)^2} & \frac{2(x-1)}{(y-1)^3} \end{pmatrix}$$

d'où

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi: $\frac{x-1}{y-1} = 1 - x + y - xy + y^2 + o(\|(x, y)\|^2)$.

Exercice

Énoncé – La pression P d'un gaz parfait est fonction de la température T et du volume V selon la loi

$$P(T, V) = nR \frac{T}{V},$$

où n est la quantité de matière (moles) et R est la constante universelle d'un gaz parfait.

On voudrait connaître la pression du gaz qui se trouve à l'état (T, V) , mais la mesure de cet état nous donne les valeurs (T_0, V_0) avec une **erreur relative**

$$\left| \frac{T - T_0}{T_0} \right| < 0.005 \% \quad \text{et} \quad \left| \frac{V - V_0}{V_0} \right| < 0.002 \%.$$

Quelle est l'erreur relative induite par cette mesure sur la valeur $P(V_0, T_0)$ de la pression?

Exercice (suite)

Réponse – On cherche une borne supérieure pour $\left| \frac{P-P_0}{P_0} \right|$, où $P = P(T, V)$ et $P_0 = P(T_0, V_0)$.

Pour cela, on utilise le développement de Taylor de $P(T, V)$ à l'ordre 1, autour de (T_0, V_0) :

$$\begin{aligned} P - P_0 &\simeq dP_{(T_0, V_0)}(T - T_0, V - V_0) \\ &= \frac{\partial P}{\partial T}(T_0, V_0) (T - T_0) + \frac{\partial P}{\partial V}(T_0, V_0) (V - V_0) \\ &= nR \frac{T - T_0}{V_0} - nR \frac{T_0(V - V_0)}{V_0^2}. \end{aligned}$$

On a alors

$$\frac{P - P_0}{P_0} \simeq nR \frac{T - T_0}{V_0 nR \frac{T_0}{V_0}} - nR \frac{T_0(V - V_0)}{V_0^2 nR \frac{T_0}{V_0}} = \frac{T - T_0}{T_0} - \frac{V - V_0}{V_0}$$

d'où suit

$$\left| \frac{P - P_0}{P_0} \right| \leq \left| \frac{T - T_0}{T_0} \right| + \left| \frac{V - V_0}{V_0} \right| < 0.005 \% + 0.002 \% = 0.007 \%$$

2.11 – Extrema locaux

Dans cette section:

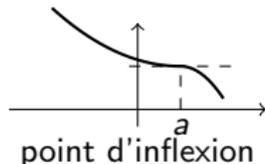
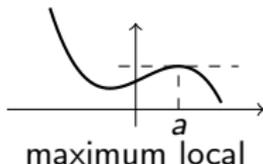
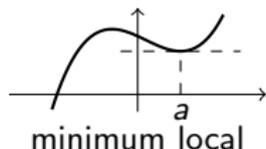
- Rappels sur les fonctions d'une variable
- Extrema locaux
- Points critiques et critère pour trouver les extrema locaux
- Points cols
- Points plats

Rappels sur les fonctions d'une variable

Rappel – Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a et non constante, la croissance ou décroissance de f en a est décelée par le signe de $f'(a)$ (positif ou négatif).

- Que se passe-t-il si $f'(a) = 0$ (*point critique*) ?

Si $f'(a) = 0$, la tangente au graphe de f est horizontale, on est dans l'un des cas suivants:



Pour savoir lequel, on regarde la convexité (*minimum local*) ou la concavité (*maximum local*) donnée par le signe de $f''(a)$ (positif ou négatif).

- Que se passe-t-il si $f''(a) = 0$ (*point plat*) ?

Si $f''(a) = 0$, on continue à dériver: si la première dérivée non nulle est d'ordre pair, on a un min ou un max local (selon le signe).

Si elle est d'ordre impair, on a un point d'inflexion.

Minimum et maximum locaux

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'un point $(a, b) \in D_f$ est un **extremum local** de f s'il est

- soit un **minimum local**:

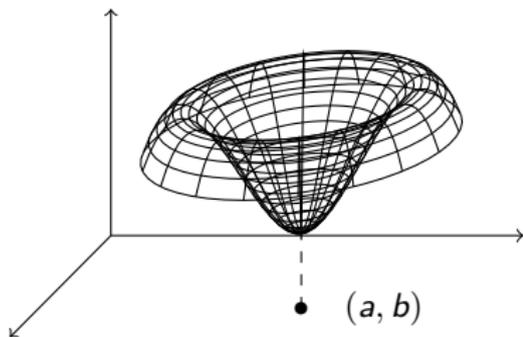
$$f(a, b) < f(x, y)$$

pour tout (x, y) dans un voisinage de (a, b) ,

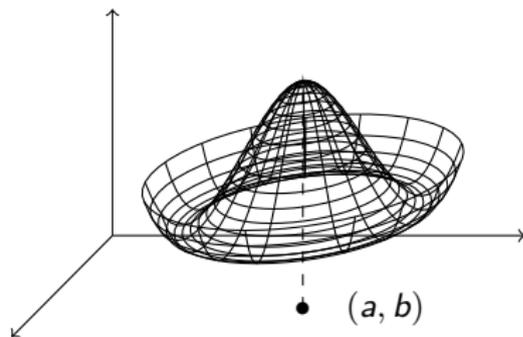
- soit un **maximum local**:

$$f(a, b) > f(x, y)$$

pour tout (x, y) dans un voisinage de (a, b) .



minimum local



maximum local

Points critiques et critère pour extrema

Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 en (a, b) , le signe de ses dérivées en (a, b) permet de trouver les extrema locaux.

Définition – On dit que (a, b) est un **point critique** de f si

$$\vec{\nabla}f(a, b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Proposition – Si (a, b) est un point critique de f , le plan tangent au graphe de f au point $(a, b, f(a, b))$ est horizontal.

Théorème – Soit (a, b) un point critique de f .

Si $\det H_f(a, b) > 0$ alors (a, b) est un extremum local:

• c'est un minimum local si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) > 0$$

• c'est un maximum local si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) < 0$$

Exemple de minimum local

Exemple – Montrons que la fonction

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

a exactement un minimum local en $(0, 0)$.

- Cherchons d'abord les points critiques:

$$\vec{\nabla}f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = (0, 0)$$

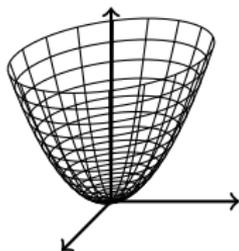
ainsi $(0, 0)$ est le seul point critique de f .

- Cherchons sa nature:

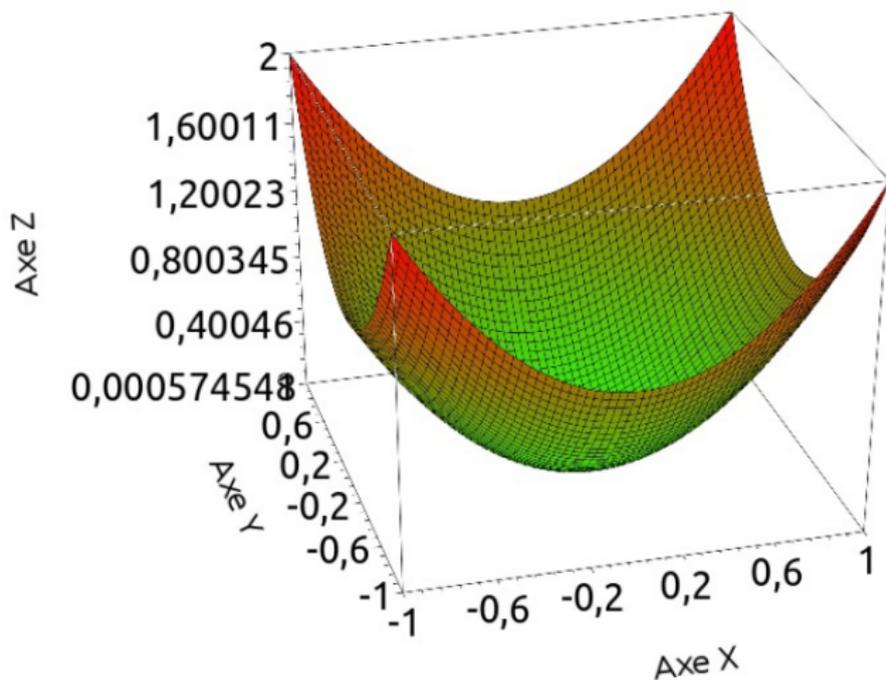
$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \det H_f(0, 0) = 4 > 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 > 0 \end{cases}$$

ainsi $(0, 0)$ est un minimum local.

- En effet, le graphe de f est:



Graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2$

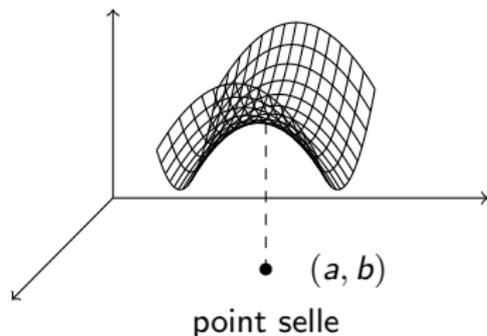


Graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2$

Points selle

En un point critique, la fonction f a un plan tangent horizontale. Si le point n'est pas un extremum local, quelle est la forme de f ?

Définition – Soit (a, b) un point critique de la fonction f . Si en (a, b) la fonction f a un minimum dans une direction et un maximum dans une autre, le point (a, b) s'appelle **point col** ou **point selle**:



Théorème – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 et soit (a, b) un point critique de f .

Si $\det H_f(a, b) < 0$ alors (a, b) est un point selle.

Exemple de point selle

Exemple – Montrons que la fonction

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

a exactement un point selle en $(0, 0)$.

- Cherchons d'abord les points critiques:

$$\vec{\nabla}f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = (0, 0)$$

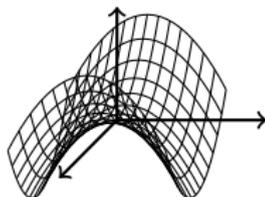
ainsi $(0, 0)$ est le seul point critique de f .

- Cherchons sa nature:

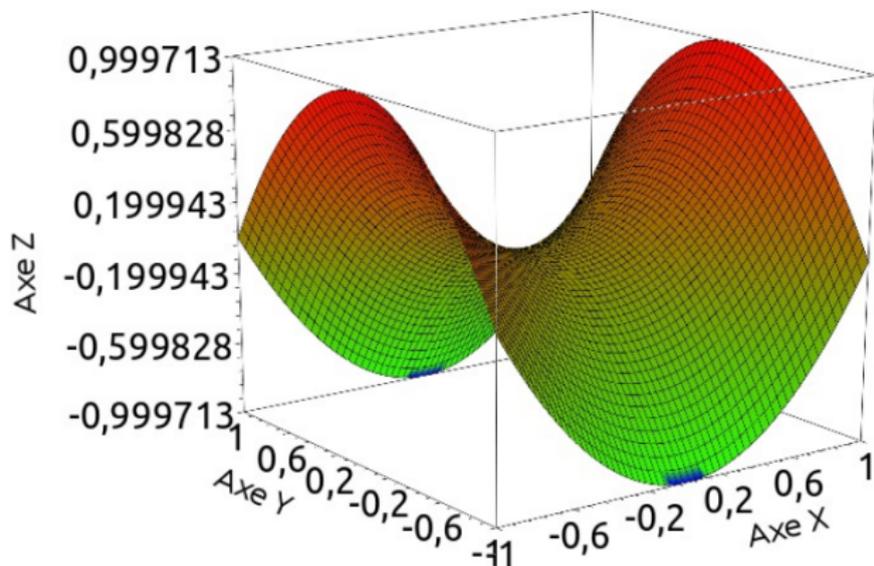
$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \det H_f(0, 0) = -4 < 0$$

ainsi $(0, 0)$ est un point col.

- En effet, le graphe de f est:



Graphe de $f(x, y) = x^2 - y^2$



Graphe de $f(x, y) = x^2 - y^2$

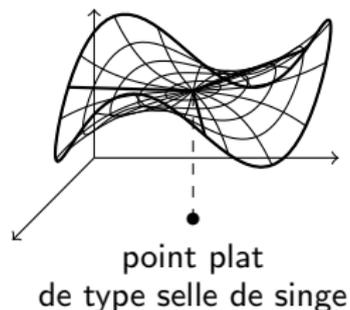
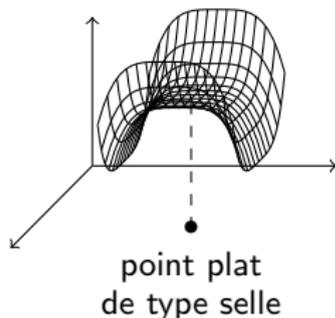
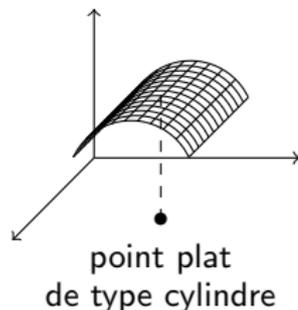
Points plats

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 et soit (a, b) un point critique de f . Par exclusion, on dit que (a, b) est un **point plat** si

$$\det H_f(a, b) = 0$$

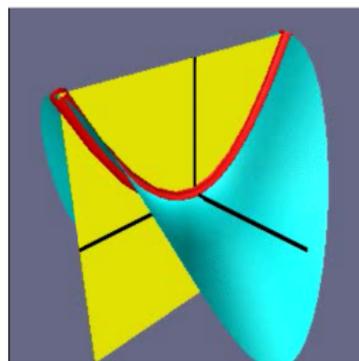
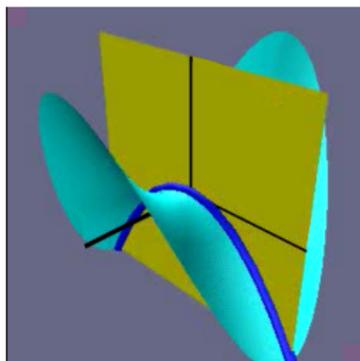
Un tel point se trouve au croisement de directions où f a

- soit au moins une direction plate (cylindre),
- soit un minimum et un maximum au même temps (selle),
- soit des inflexions (selle de singe).

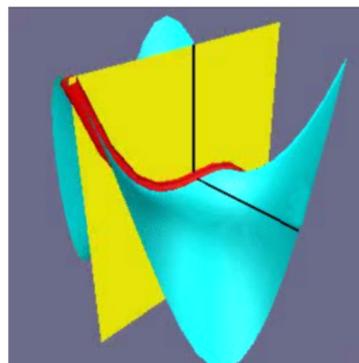
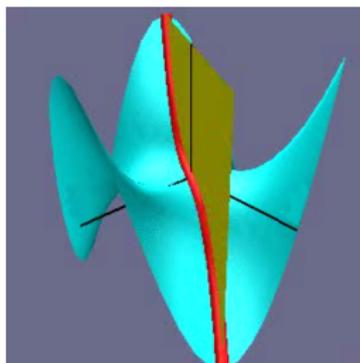


On distingue ces types avec les dérivées d'ordre supérieur à 2.

Points col et points plat



Un point col non plat ($z = x^2 - y^2$) ou plat ($z = x^4 - y^4$)



Un point plat à selle de singe ($z = x^3 - 3xy^2$)

Exercice

Énoncé – Déterminer les points critiques de la fonction

$$f(x, y) = 4(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2$$

et, si possible, leur nature.

Réponse – Cherchons d'abord les points critiques:

$$\vec{\nabla}f(x, y) = \begin{pmatrix} 8x - 4x(x^2 + y^2) \\ 8y - 4y(x^2 + y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} x(2 - x^2 - y^2) = 0 \\ y(2 - x^2 - y^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \text{soit } (x, y) = (0, 0) \\ \text{soit } x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Par conséquent, f a

- un cercle de points critiques d'équation $x^2 + y^2 = 2$
- et un point critique isolé de coordonnées $(0, 0)$.

Exercice (suite)

Cherchons la nature de ces points critiques:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 8 - 12x^2 - 4y^2 & -8xy \\ -8xy & 8 - 12y^2 - 4x^2 \end{pmatrix}$$

- Pour le point $(0, 0)$, on a

$$\det H_f(0, 0) = \det \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 64 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 8 > 0$$

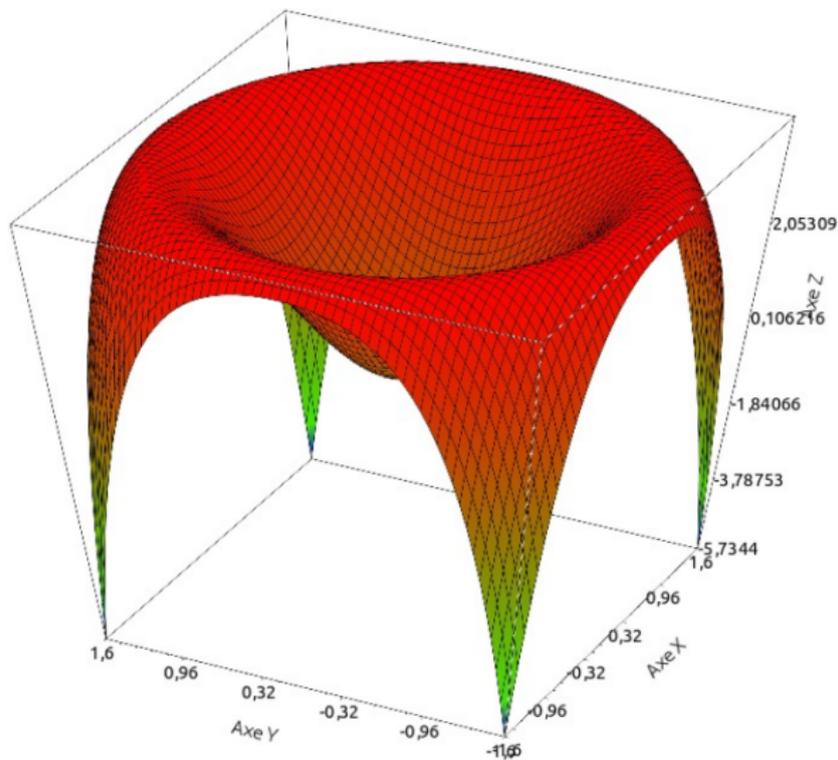
donc $(0, 0)$ est un minimum local.

- Pour les points (x, y) tels que $x^2 + y^2 = 2$, on a

$$\det H_f(x, y) = \det \begin{pmatrix} -8x^2 & -8xy \\ -8xy & -8y^2 \end{pmatrix} = 0$$

donc tous les points du cercle $x^2 + y^2 = 2$ sont plats.

Graphe de $f(x, y) = 4(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2$



Graphe de $f(x, y) = 4(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2$