UCBL – L1 PCSI – UE Math 2

Fonctions de plusieurs variables et champs de vecteurs

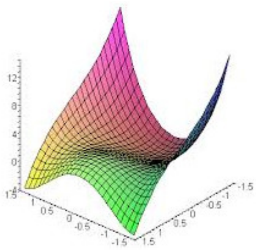
Alessandra Frabetti

Institut Camille Jordan,
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard Lyon 1

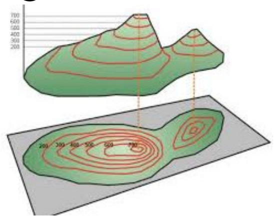
http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/Math2/

But du cours:

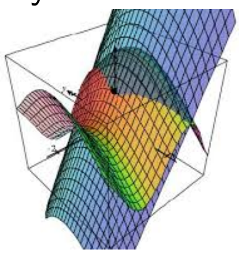
Graphe de fonction



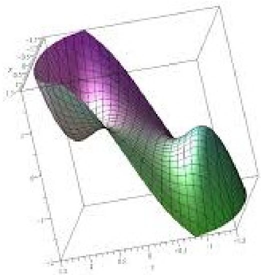
Lignes de niveau



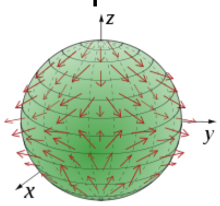
Taylor



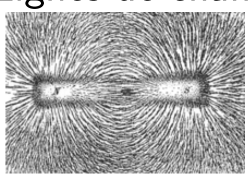
Extrema



Champs de vecteurs



Lignes de champ



Programme et plan des cours

Partie I : Fonctions de plusieures variables

CM 1 – Coordonnées, ensembles compacts
CM 2 – Fonctions, graphes, opérations
CM 3 – Dérivées partielles, gradient, différentielle
CM 4 – Jacobienne, règle de la chaîne
CM 5 – Dérivées secondes, Hessienne, Laplacien, Taylor, extrema
CM 6 – Intégrales simples et doubles
CM 7 – Intégrales triples. Aire, volume, centre de masse

Partie II : Champs de vecteurs

CM 8 – Champs scalaires et champs de vecteurs
CM 9 – Champs conservatifs
CM 10 – Champs incompressibles
CM 11 – Courbes et circulation
CM 12 – Surfaces et flux

Prérequis

1. **Espaces vectoriels et vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$**
   (produits scalaire, vectoriel et mixte).
2. **Applications linéaires et matrices**
   (produit, détérminant, matrice inverse).
3. **Géométrie cartesienne du plan et de l'espace**
   (droites, coniques, plans, quadriques).
4. **Dérivées et intégrales des fonctions d'une variable**
   (graphes, dérivées, points critiques, extrema, Taylor, primitives).
5. **Équations différentielles du 1er ordre**.

Chapitre 1
Fonctions de plusieures variables

Dans ce chapitre:

1.1 – Coordonnées cartesiennes, polaires, cylindriques et sphériques

1.2 – Ensembles ouverts, fermés, bornés et compacts

1.3 – Fonctions de deux ou trois variables

1.4 – Graphes et lignes de niveau

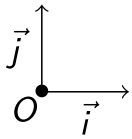
1.5 – Opérations, composition et changements de coordonnées

1.1 – Coordonnées polaires, cylindriques, sphériques

Dans cette section:

- Coordonnées cartesiennes et polaires du plan
- Coordonnées cartesiennes, cylindriques et sphériques de l'espace

Coordonnées cartesiennes du plan

On note $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère  du plan.

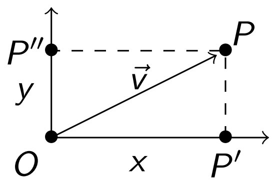
Définition – Soit P un point du plan.

- Le **coordonnées cartesiennes** de P sont le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\quad \vec{v} = \overrightarrow{OP} \; = \; x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \; \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Autrement dit,

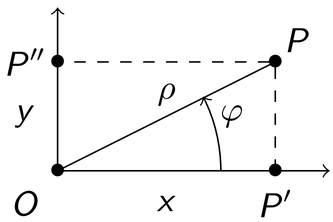
$$x = \|\overrightarrow{OP'}\| \quad \text{et} \quad y = \|\overrightarrow{OP''}\|$$

sont les longueurs des projections orthogonales de $\vec{v}$ dans les directions $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.



Coordonnées polaires

- Les **coordonnées polaires** de $P \neq O$ sont le couple $(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\quad$ tel que $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$



On a donc

$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi \;\; \text{t. q. } \tan \varphi = \frac{y}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ ou } \cot \varphi = \frac{x}{y} \text{ si } y \neq 0 \\ \quad \big(\text{par ex.} \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad \text{si } x, y > 0\big) \end{cases}$$

Exercice: coord. polaires $\longrightarrow$ cartesiennes

Énoncé – *Pour les points suivants du plan, dont on connait les coordonnés polaires, trouver les coordonnées cartesiennes :*

$$A \left\{ \begin{array}{l} \rho = 3 \\ \varphi = 5\pi/4 \end{array} \right. \qquad B \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{2} \\ \varphi = 3\pi/4 \end{array} \right. \qquad C \left\{ \begin{array}{l} \rho = 0 \\ \varphi = 3\pi/2 \end{array} \right.$$

Réponse – On dessine chaque point sur un plan, ensuite on calcule les coordonnées cartésiennes avec les formules:

- $A \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 3\cos(5\pi/4) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = 3\sin(5\pi/4) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{array} \right. \qquad A\,(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$

- $B \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{2}\cos(3\pi/4) = \frac{-\sqrt{2}^2}{2} \\ y = \sqrt{2}\sin(3\pi/4) = \frac{\sqrt{2}^2}{2} \end{array} \right. \qquad B\,(-1, 1)$

- $C \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0\ \cos(3\pi/2) = 0 \\ y = 0\ \sin(3\pi/2) = 0 \end{array} \right. \qquad C\,(0, 0)$

Exercice: coord. cartesiennes $\longrightarrow$ polaires

Énoncé – *Pour les points suivants du plan en coordonnés cartesiennes, trouver les coordonnées polaires :*

$$A\,(2, 3) \qquad B\,(2, 0) \qquad C\,(0, 3)$$

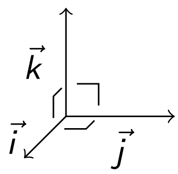
Réponse – On dessine chaque point sur un plan, ensuite on calcule les coordonnées cartesiennes avec les formules:

- $A \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \\ \cos\varphi = 2/\sqrt{13} \\ \sin\varphi = 3/\sqrt{13} \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{13} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) \end{array} \right.$

- $B \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{4+0} = 2 \\ \cos\varphi = 2/2 = 1 \\ \sin\varphi = 0/2 = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \rho = 2 \\ \varphi = \arctan 0 = 0 \end{array} \right.$

- $C \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{0+9} = 3 \\ \cos\varphi = \frac{0}{3} = 0 \\ \sin\varphi = \frac{3}{3} = 1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \rho = 3 \\ \varphi = \pi/2 \end{array} \right.$

Coordonnées cartesiennes de l'espace

On note $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère 

de l'espace.

Définition – Soit P un point de l'espace.

• Les **coordonnées cartesiennes** de P sont le triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\quad \vec{v} = \overrightarrow{OP} \; = \; x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \; \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Autrement dit,

$$x = \|\overrightarrow{OP'}\|, \quad y = \|\overrightarrow{OP''}\| \quad \text{et} \quad z = \|\overrightarrow{OP'''}\|$$

sont les longueurs des projections orthogonales de $\vec{v}$ dans les directions $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

Coordonnées cylindriques

• Les **coordonnées cylindriques** de $P \neq O$ sont le triplet $(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

Si $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ on a donc

$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OQ}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{\rho} \\ \sin \varphi = \frac{y}{\rho} \end{cases} \\ z = z \end{cases}$$

Coordonnées sphériques

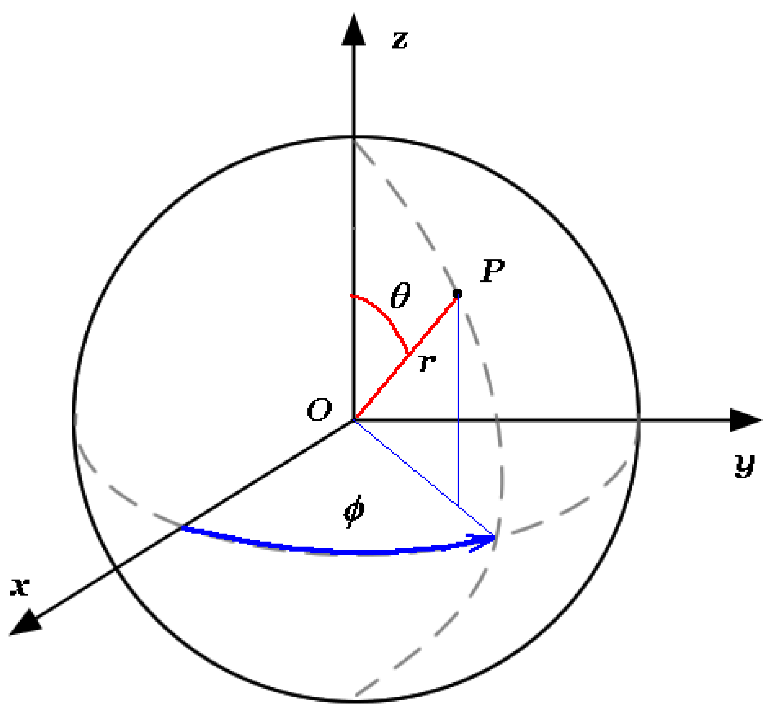
- Les **coordonnées sphériques** de $P \neq O$ sont le triplet $(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times]0, \pi[$ tel que

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Si $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ on a donc

$$\begin{cases} r = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \\ \theta = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$$

Coordonnées de l'espace



Exercice: coord. cylindriques $\longrightarrow$ cartesiennes

Énoncé – *Pour les points suivants, dont on connait les coordonnés cylindriques, trouver les coordonnées cartesiennes :*

$$A \left\{ \begin{array}{l} \rho = 3 \\ \varphi = \pi/3 \\ z = 2 \end{array} \right. \qquad B \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{2} \\ \varphi = \pi/4 \\ z = -3 \end{array} \right.$$

Réponse – On dessine chaque point sur un plan, ensuite on calcule les coordonnées cartesiennes avec les formules:

- A $\quad \left\{ \begin{array}{l} x = 3\cos(\pi/3) = \frac{3}{2} \\ y = 3\sin(\pi/3) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ z = 2 \end{array} \right. \qquad A\,(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 2)$

- B $\quad \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{2}\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 1 \\ y = \sqrt{2}\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 1 \\ z = -3 \end{array} \right. \qquad B\,(1, 1, -3)$

Exercice: coord. sphériques $\longrightarrow$ cartesiennes

Énoncé – *Pour les points suivants, dont on connait les coordonnées sphériques, trouver les coordonnées cartesiennes :*

$$C \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{2} \\ \varphi = \pi/2 \\ \theta = 3\pi/4 \end{array} \right. \qquad D \left\{ \begin{array}{l} r = 1 \\ \varphi = \pi/3 \\ \theta = \pi/6 \end{array} \right.$$

Réponse – On dessine chaque point sur un plan, ensuite on applique les formules:

- C $\quad \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{2}\ \cos(\pi/2)\ \sin(3\pi/4) = 0 \\ y = \sqrt{2}\ \sin(\pi/2)\ \sin(3\pi/4) = 1 \\ z = \sqrt{2}\ \cos(3\pi/4) = -1 \end{array} \right. \qquad C\,(0, 1, -1)$

- D $\quad \left\{ \begin{array}{l} x = \cos(\pi/3)\ \sin(\pi/6) = \frac{1}{4} \\ y = \sin(\pi/3)\ \sin(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ z = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. \qquad D\,(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

Exo: cartesiennes $\rightarrow$ cylindriques et sphériques

Énoncé – *Pour les points suivants en coordonnées cartesiennes, trouver les coordonnées cylindriques et sphériques:*

$$A = (-1, 1, 1) \qquad B\,(3, 0, 0) \qquad C\,(0, 1, 1)$$

Réponse –

- A $\begin{cases} \rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \tan\varphi = -1 \\ r = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \varphi = 3\pi/4 \\ z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} r = \sqrt{3} \\ \varphi = 3\pi/4 \\ \theta = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$
- B $\begin{cases} \rho = \sqrt{9+0} = 3 \\ \tan\varphi = \frac{0}{3} = 0 \\ r = \sqrt{9+0+0} = 3 \\ \cos\theta = \frac{0}{3} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = 3 \\ \varphi = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} r = 3 \\ \varphi = 0 \\ \theta = \pi/2 \end{cases}$
- C $\begin{cases} \rho = \sqrt{0+1} = 1 \\ \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi = 1 \\ r = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2} \\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi = \pi/2 \\ z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \varphi = \pi/2 \\ \theta = \pi/4 \end{cases}$

Notations des points

Conclusion –

- Un point <u>géométrique</u> du plan ou de l'espace est noté P.
- Un point <u>en coordonnées</u> dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est noté $\vec{x}$.

Cela signifie donc (x, y), (ρ, φ), (x, y, z), (ρ, φ, z) ou (r, φ, θ) selon le contexte.

Dans la suite $\mathbb{R}^n$ est l'un des trois espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

1.2 – Ensembles ouverts, fermés, bornés, compacts

Dans cette section :

- Intervalles, disques, boules
- Bord d'un ensemble
- Ensembles ouverts et fermés
- Ensembles bornés et compacts

Intervalles

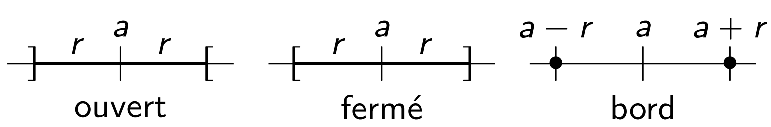
Définitions –

• Dans $\mathbb{R}$, on appelle

intervalle ouvert $I_a(r) =]a - r, a + r[$

intervalle fermé $\bar{I}_a(r) = [a - r, a + r]$

bord de l'intervalle $\partial I_a(r) = \{a - r, a + r\}$



Disques

- Dans $\mathbb{R}^2$, on appelle

disque ouvert

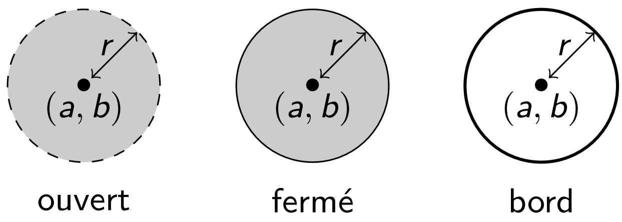
$$D_{(a,b)}(r) = \left\{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\right\}$$

disque fermé

$$\overline{D}_{(a,b)}(r) = \left\{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant r^2\right\}$$

bord du disque (= cercle)

$$\partial D_{(a,b)}(r) = \left\{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\right\}$$



Boules

- Dans $\mathbb{R}^3$, on appelle

boule ouverte

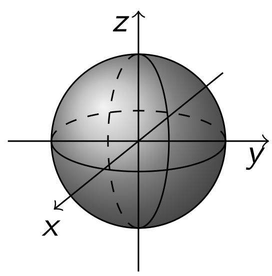
$$B_{(a,b,c)}(r) = \left\{(x,y,z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < r^2\right\}$$

boule fermée

$$\overline{B}_{(a,b,c)}(r) = \left\{(x,y,z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leqslant r^2\right\}$$

bord de la boule (= sphère)

$$\partial B_{(a,b,c)}(r) = \left\{(x,y,z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2\right\}$$



Bord d'un ensemble

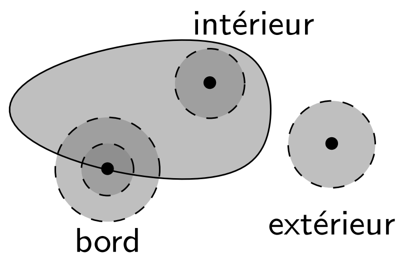
Définition – Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble.

• Un point P est un **point intérieur** à D, s'il existe une boule ouverte B_P contenue dans D.

• Un point P est un **point extérieur** à D il existe une boule ouverte B_P qui n'intersecte pas D.

• Un point $P \in \mathbb{R}^n$ est un **point du bord** de D si toute boule ouverte B_P centrée en P contient à la fois des points de D et de son complémentaire $\mathbb{R}^n \backslash D$.

• Le **bord** de D est l'ensemble des points du bord, noté ∂D.



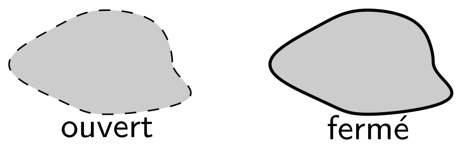
ATTENTION – Un point de ∂D peut être dans D ou non!

Ensembles ouverts et fermés

Définition – Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble.

• D est **ouvert** s'il ne contient aucun de ses points de bord.

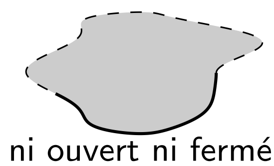
• D est **fermé** s'il contient tous ses points de bord.



Propriété – *Le complémentaire d'un ouvert est fermé, le complémentaire d'un fermé est ouvert.*

• Par convention, l'**ensemble vide** $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont à la fois ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$.

ATTENTION – Il existe des ensembles qui ne sont ni ouverts ni fermés!

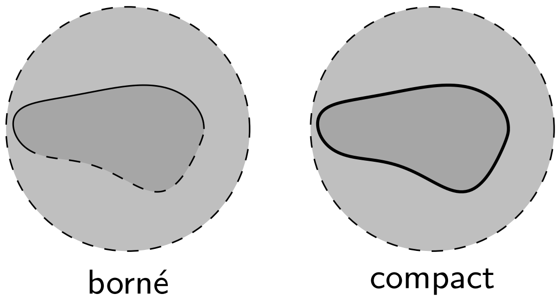


Ensembles bornés et compacts

Définition – Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble.

- D est **borné** s'il existe un disque ouvert B qui le contient.

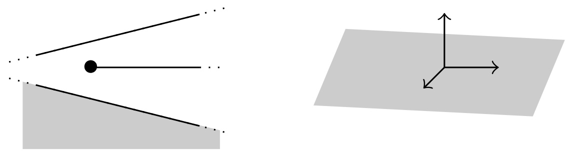
- D est **compact** s'il est fermé et borné.



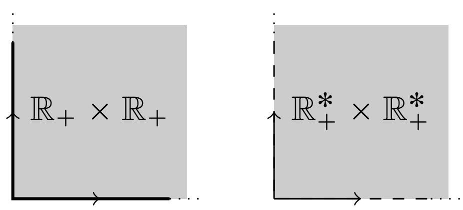
Exemples: non bornés fermés et ouverts

Exemples –

- Droites, demi-droites, plans et demi-plans sont non bornés. Les droites et les plans sont fermés. Les demi-droites et les demi-plans sont fermés s'ils contiennent leurs point ou droite extreme.

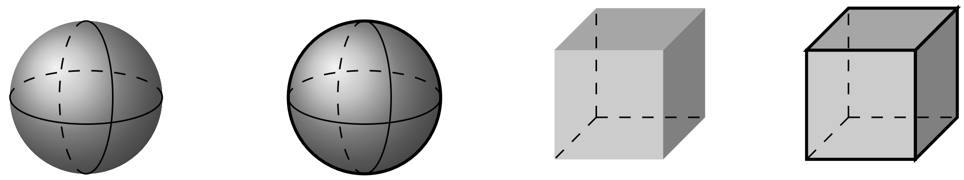


- Les quadrants $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ sont non bornés. Le premier est aussi fermé. Le deuxième est ouvert dans $\mathbb{R}^2$ mais ne l'est pas dans $\mathbb{R}^3$ (car tout le quadrant est son propre bord dans $\mathbb{R}^3$).



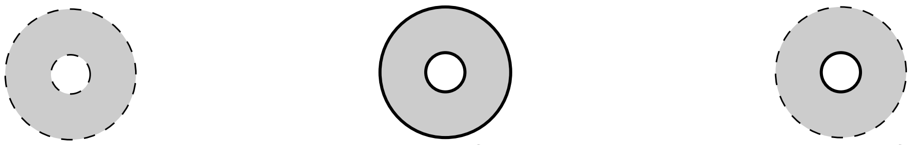
Exemples: bornés ouverts et fermés

• Disques, boules, carrés et cubes pleins sont bornés.
Ils sont fermés (et donc compacts) s'ils contiennent leur bord (cercle, sphère ou carré et cube).



boule ouverte | boule fermée | cube ouvert | cube fermé

• Les couronnes circulaires sont bornées. Dans le plan, elles sont fermées (donc compactes) ou ouvertes selon qu'elles contiennent les circles ou non.



couronne ouverte | couronne fermée | ni ouverte ni fermée

Exercice

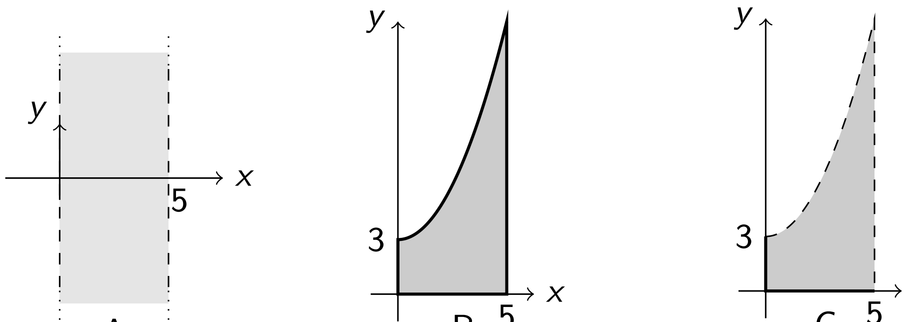
Énoncé – *Dessiner les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ et dire s'ils sont ouverts, fermés, bornés ou compacts :*

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 5\right\}$$

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 5,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2 + 3\right\}$$

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x < 5,\ 0 \leqslant y < x^2 + 3\right\}$$

Réponse –



A ouvert non borné | B compact | C borné ni ouvert ni fermé

1.3 – Fonctions de deux ou trois variables

Dans cette section:

- Fonctions réelles et vectorielles de plusieurs variables
- Domaine et image

Fonctions réelles et vectorielles

Définition – Une **fonction de plusieurs variables** est une loi

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{x} \mapsto f(\vec{x})$$

qui associe à un point $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ <u>au plus</u> une valeur $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$.

- Pour ce cours, $n = 2$ ou 3 et $m = 1$, 2 ou 3.

- Si $m = 1$, la fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **réelle**.

- Si $m > 1$, la fonction f est dite **vectorielle**.

Exemples de fonctions de plusieures variables

- **Fonctions réelles**

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y) = x^3 + \sin(xy) + 1$

Pression $= f$(Volume, Temperature)

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = x^3 z + xyz + \ln(z^2+1)$

- **Fonctions vectorielles**

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto f(x,y) = (x^2, x+y, y^3)$

$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto g(x,y,z) = (x^2+z, xz+y)$

$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (\rho,\varphi) \mapsto h(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$

Attention aux fonctions vectorielles et linéaires !

ATTENTION – Une fonction vectorielle n'est pas linéaire en général !

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est <u>linéaire</u> si et seulement si, en coordonnée cartesiennes, ses composantes sont des <u>polynômes de degré 1 sans termes constants</u>.

Par exemple:

- $f(x,y,z) = \big(2z - x, 0, 3y + 5x - z\big)$ est linéaire
- $g(x,y,z) = \big(xz + 5, 3, \sin(y)\big)$ n'est pas linéaire,

  car contient un polynôme de degré 2 (xz),
  deux termes constants non nuls (5 et 3)
  et une fonction non-polynomiale ($\sin(y)$).

Domaine et image

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction.

• Le **domaine (de définition)** de f est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels f est bien définie:

$$D_f = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{il existe } f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m\right\}$$

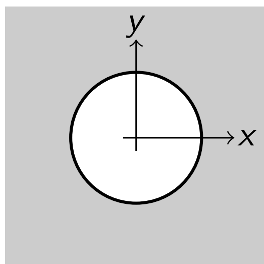
• L'**image** de f est l'ensemble des valeurs de f :

$$I_f = f(D_f) = \left\{\vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid \text{il existe } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \vec{y} = f(\vec{x})\right\}$$

Exemples: domaine et image

• $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$

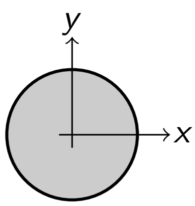
$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \geqslant 1\right\}$
$\quad =$ complémentaire du disque $D_O(1)$
$\quad\quad$ (fermé non borné)



$I_f = [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$

• $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$
$\quad =$ disque fermé $\overline{D}_O(1)$ (compact)



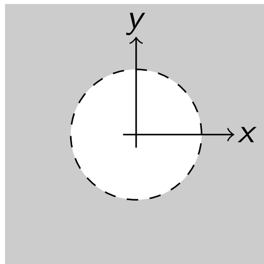
$I_f = [0,1]$

car $\quad x^2+y^2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow 0 \leqslant 1-x^2-y^2 \leqslant 1$
$\quad\quad \Longleftrightarrow 0 \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2} = f(x,y) \leqslant 1$

Exemples: domaine et image

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

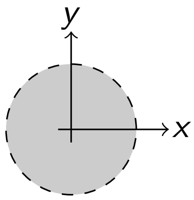
$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$
$= $ complémentaire du disque $\overline{D}_O(1)$
(ouvert non borné)



$I_f = \mathbb{R}$

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$
$= $ disque ouvert $D_O(1)$
(ouvert borné)



$I_f = \ln]0, 1] =]-\infty, 0] = \mathbb{R}^-$

Exemples: domaine et image

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \left(\frac{1}{x^2}, -\frac{1}{y^2}\right)$

$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, \; y \neq 0\}$
$= $ plan privé des deux axes de coordonnées
(ouvert non borné)

$I_f = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^- = 4^{eme}$ quadrant privé de son bord

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,
$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 - z^2}, -\sqrt{y^2 + z^2}\right)$

$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 \geqslant 0\}$
$= $ cône délimité par les deux plans $z = \pm x$
(fermé non borné)

$I_f = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- = 4^{eme}$ quadrant

Exercices

Énoncé – *Dessiner le domaine de définition et l'image des fonctions suivantes et déterminer la nature du domaine (ouvert, fermé, borné, compact).*

• $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2+y^2+1)}{x^2+y^2}$.

Réponse : $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+1 > 0,\ x^2+y^2 \neq 0\}$
$= \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} =$ plan moins l'origine (ouvert non borné)

La condition $x^2+y^2+1 > 0$ est vérifiée pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et la condition $x^2+y^2 \neq 0$ est vérifiée si $(x,y) \neq (0,0)$.

$I_f = \mathbb{R}_+^* =]\,0,+\infty\,[$ (ouvert non borné)

car $x^2+y^2 > 0$ implique $x^2+y^2+1 > 1$ et par conséquent $\ln(x^2+y^2+1) > 0$, et le quotient de deux nombres positifs est positif.

Exercices

• $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto g(x,y) = \left(\dfrac{\ln(x^2+1)}{y^2}, \dfrac{\ln(y^2+1)}{x^2}\right)$

Réponse :
$D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+1 > 0,\ y \neq 0,\ y^2+1 > 0,\ x \neq 0\}$
$= \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* =$ plan privé des deux axes de coordonnées
(ouvert non borné).
En effet, les conditions $x^2+1 > 0$ et $y^2+1 > 0$ sont vérifiées pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$I_g = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* = 1^{er}$ quadrant privé de son bord
(ouvert non borné)

Les conditions $x \neq 0$ et $y \neq 0$ impliquent $x^2 > 0$ et $y^2 > 0$, et par conséquent $\ln(x^2+1) > 0$ et $\ln(y^2+1) > 0$.

1.4 – Graphes et lignes de niveau

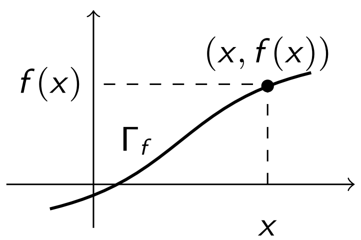
Dans cette section:

- Graphe des fonctions d'une variable (rappel)
- Graphe des fonctions de plusieures variables
- Lignes de niveau

Graphe des fonctions d'une variable

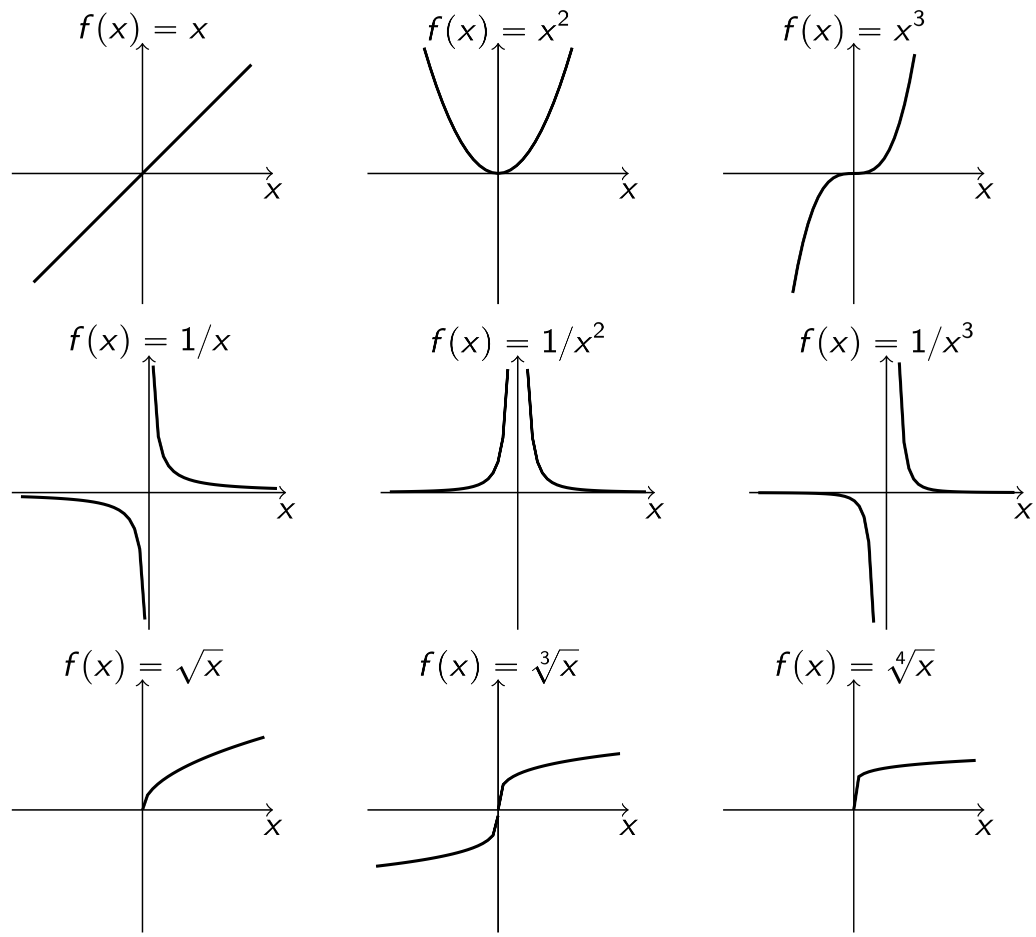
Rappel – Le **graphe de** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\Gamma_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f,\ y = f(x) \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

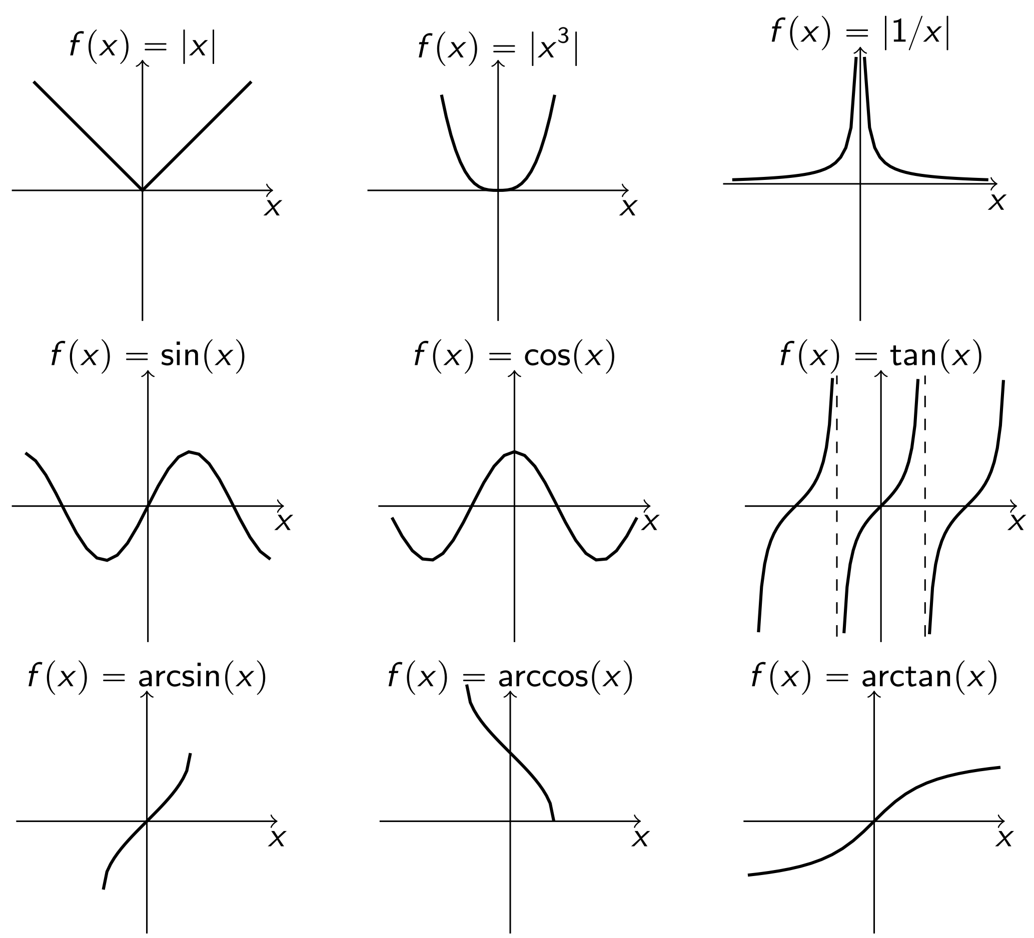


Le graphe des fonctions usuelles d'une variable est à connaître par cœur.

Graphes à connaître !

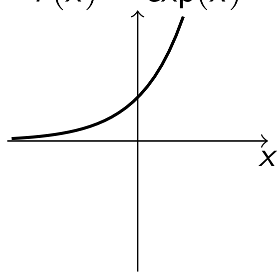


D'autres graphes à connaître !

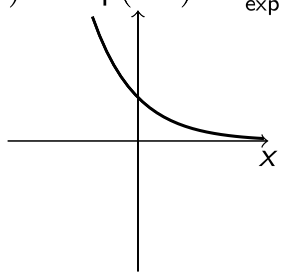


D'autres encore... ouf !

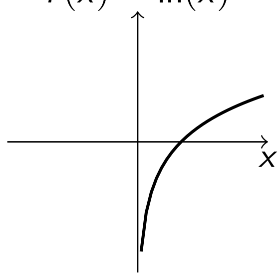
$f(x) = \exp(x)$



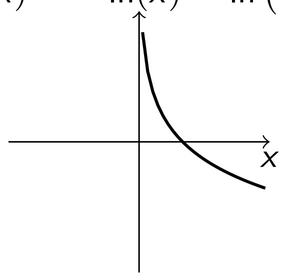
$f(x) = \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$



$f(x) = \ln(x)$



$f(x) = -\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

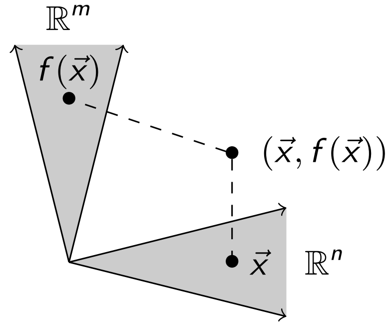


Graphe des fonctions de plusieures variables

Définition – Le **graphe de** $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est l'ensemble

$$\Gamma_f = \left\{ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \vec{x} \in D_f,\ \vec{y} = f(\vec{x}) \right\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

Problème – Ce graphe est difficile à dessiner si $n + m > 3$!

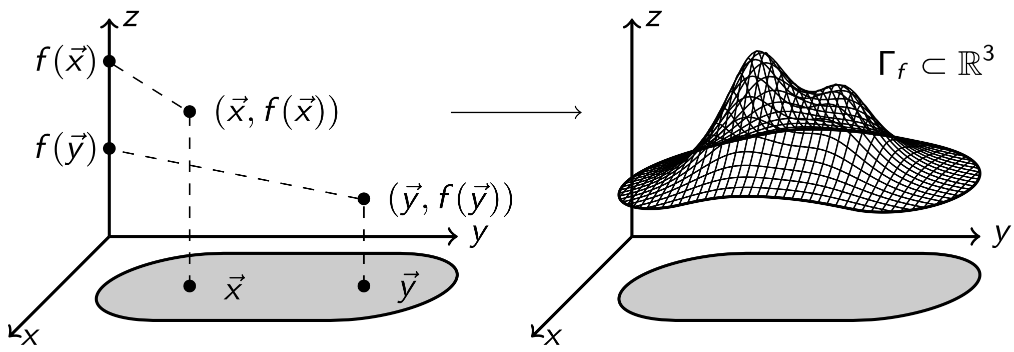


Regardons $n = 2$ et $m = 1$.

Graphe des fonctions réelle de deux variables

Le **graphe de** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\Gamma_f = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_f,\ z = f(x, y) \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$



Exemple: graphe d'une fonction de deux variables

Exemple –

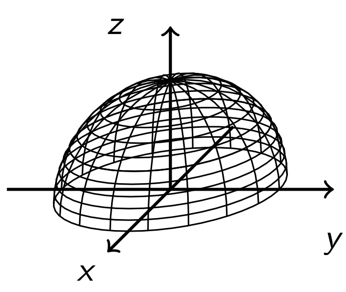
- $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = z$

$\Longrightarrow \quad D_f = \overline{D}_0(1) \quad$ et $\quad I_f = [0, 1]$

Notons que

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2, \quad \text{c.-à-d.} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad \text{et} \quad z \geqslant 0.$$

Ainsi $\quad \Gamma_f =$ demi-sphère



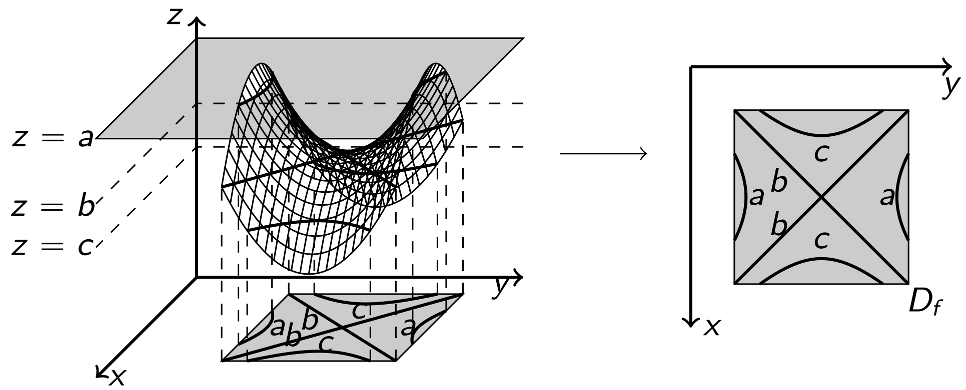
Lignes de niveau

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de domaine $D_f \subset \mathbb{R}^2$ et d'image $I_f \subset \mathbb{R}$.

Définition – Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la **ligne de niveau** a est la projection sur D_f de $\Gamma_f \cap \{z = a\}$, c'est-à-dire

$$L_a(f) = \{(x,y) \in D_f \mid f(x,y) = a\}.$$

À noter que $L_a(f) = \varnothing$ si $a \notin I_f$.



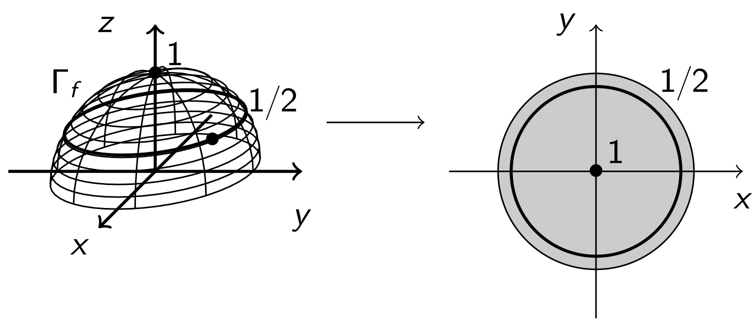
Exemple: lignes de niveau

Exemple –

- $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = z, \quad D_f = \overline{D}_0(1),\ I_f = [0,1]$

Pour tout $a \in [0,1] = I_f$ on a

$$\begin{aligned} L_a(f) &= \left\{ (x,y) \in \overline{D}_O(1) \mid \sqrt{1 - x^2 - y^2} = a \right\} \\ &= \text{cercle centré en } (0,0) \text{ de rayon } \sqrt{1 - a^2} \end{aligned}$$



Exercice

Énoncé – *Trouver le domaine, l'image et la nature des lignes de niveau de la fonction*

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

Dessiner les lignes de niveau pour les valeurs $a = -2, -1, 0, 1, 2$. *En déduire le graphe de* f.

Réponse –

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -x\} = \mathbb{R}^2 \setminus$ la bissectrice du 2^{eme} quadrant

$I_f = \mathbb{R}$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$L_a(f) = \left\{(x,y) \in D_f \mid \frac{x-y}{x+y} = a\right\}$$

$=$ droite d'équation $\quad (a-1)x + (a+1)y = 0$

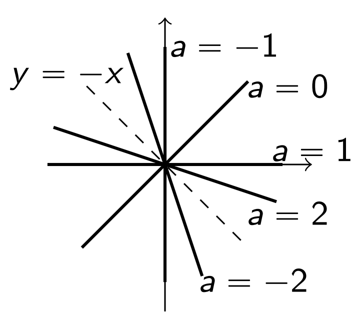
Exercice

$L_a(f) =$ droite d'équation $\quad (a-1)x + (a+1)y = 0$

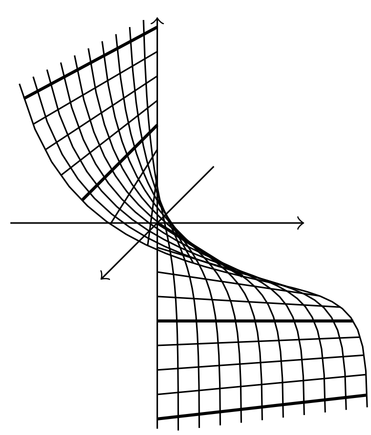
$$\begin{array}{llllll} a = 0 & \Longrightarrow & y = x & & & \\ a = 1 & \Longrightarrow & y = 0 & a = -1 & \Longrightarrow & x = 0 \\ a = 2 & \Longrightarrow & y = -\frac{1}{3}x & a = -2 & \Longrightarrow & y = -3x \end{array}$$

$$\Gamma_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq x,\ z = \frac{x-y}{x+y}\right\}$$

$=$ union de droites tournantes (sans l'axe Oz)



$\longleftrightarrow$



1.5 – Opérations, composition et changement de coordonnées

Dans cette section:

- Somme et produit de fonctions
- Composition de fonctions
- Changement de coordonnées

Somme et produit de fonctions

Définition – Soient $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On définit les fonctions suivantes:

somme: $\big(f+g\big)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}), \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g;$

zéro: $0(\vec{x}) = (0, ..., 0), \quad D_0 = \mathbb{R}^n;$

opposée de f: $\big(-f\big)(\vec{x}) = -f(\vec{x}), \quad D_{-f} = D_f;$

produit de f **par** λ: $\big(\lambda f\big)(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}), \quad D_{\lambda f} = D_f.$

Si f et g sont des fonctions <u>réelles</u> $(m = 1)$:

produit: $\big(fg\big)(\vec{x}) = f(\vec{x})g(\vec{x}), \quad D_{fg} = D_f \cap D_g;$

un: $1(\vec{x}) = 1, \quad D_1 = \mathbb{R}^n;$

inverse de f: $\Big(\frac{1}{f}\Big)(\vec{x}) = \frac{1}{f(\vec{x})}, \quad D_{1/f} = \Big\{\vec{x} \in D_f \mid f(\vec{x}) \neq 0\Big\}.$

Exemples: somme et produit de fonctions

Exemple –

Si $\quad f(x,y) = x^2 - y^2, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 \quad$ et $\quad \lambda = 3,$
on a :

$$\left[\begin{array}{l} (f+g)(x,y) = x^2 - y^2 + x^2 + y^2 = 2x^2 \\[2ex] (3f)(x,y) = 3(x^2 - y^2) \\[2ex] (fg)(x,y) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = x^4 - y^4 \\[2ex] \dfrac{1}{f}(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2} \quad \text{si } x \neq \pm y. \end{array}\right.$$

Propriétés des opérations

Proposition – *Les opérations d'addition, produit par scalaire et multiplication entre fonctions à plusieurs variables ont les mêmes proprietés que leurs analogues entre fonctions à une variable (elles sont commutatives, associatives et distributives).*

En particulier, *l'ensemble des fonctions à plusieurs variables $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ muni de l'addition et du produit par scalaire est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension infinie.*

Composition de fonctions

Définition – Données deux fonctions

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

on définit la **composée de** f **et** g comme la fonction

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

obtenue en calculant g sur les valeurs obtenues par f:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^p \\ \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}) & \mapsto & (g \circ f)(\vec{x}) = g\Big(f(\vec{x})\Big) \end{array}$$

Le domaine de $g \circ f$ est l'ensemble

$$D_{g \circ f} = \Big\{\vec{x} \in D_f \mid f(\vec{x}) \in D_g\Big\}.$$

Exemples: cas usuels de fonctions composées

Fixons $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 - y.$

• Si $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ z \mapsto g(z) = \exp z$
alors $\quad g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad$ se trouve en posant $\quad z = f(x, y)$:

$$\big(g \circ f\big)(x, y) = g(f(x, y)) = g(x^2 - y) = \exp(x^2 - y)$$

• Si $\quad h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (u, v) \mapsto h(u, v) = \big(h_1(u, v), h_2(u, v)\big) = (2u, u + v)$
alors $\quad f \circ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad$ se trouve en posant $\left\{ \begin{array}{l} x = h_1(u, v) \\ y = h_2(u, v) \end{array} \right.$:

$$\big(f \circ h\big)(u, v) = f(h(u, v)) = f(2u, u + v) = 4u^2 - (u + v)$$

• Si $\quad \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (\cos t, \sin t)$
alors $\quad f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad$ se trouve en posant $\left\{ \begin{array}{l} x = \gamma_1(t) \\ y = \gamma_2(t) \end{array} \right.$:

$$\big(f \circ \gamma\big)(t) = f(\gamma(t)) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin t$$

Changement de variables

Un changement de variable s'écrit comme une composée !

Proposition – *Si* $\vec{y} = f(\vec{x})$ *est une fonction des variables* $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, *son expression comme* *<u>fonction de nouvelles variables</u>* $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ *est donnée par la fonction composée*

$$\tilde{f} = f \circ h,$$

où

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ \vec{u} \mapsto h(\vec{u}) = \vec{x}$$

est l'application qui décrit le changement de variables des $(x_1, \dots, x_n)$ *vers les* $(u_1, \dots, u_n)$.

Autrement dit, on a

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f\big(h(\vec{u})\big) = \tilde{f}(\vec{u}).$$

Changements en polaires, cylindriques, sphériques

- **Changement en coordonnées polaires:**

$$f(x, y) = f\big(h(\rho, \varphi)\big) = \tilde{f}(\rho, \varphi)$$

avec $h : [0, \infty[\times [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad h(\rho, \varphi) = (\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi)$

- **Changement en coordonnées cylindriques:**

$$f(x, y, z) = f\big(h(\rho, \varphi, z)\big) = \tilde{f}(\rho, \varphi, z)$$

avec $h : [0, \infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$h(\rho, \varphi, z) = (\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi, z)$

- **Changement en coordonnées sphériques:**

$$f(x, y, z) = f\big(h(r, \varphi, \theta)\big) = \tilde{f}(r, \varphi, \theta)$$

avec $h : [0, \infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$h(r, \varphi, \theta) = (r \cos\varphi \sin\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\theta)$

Exemple: passage en coordonnées polaire

Exemple – On veut exprimer la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$$

en coordonnées polaires.

Pour cela il suffit de faire la composée $f \circ h$ où

$$h(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$$

c'est-à-dire à remplacer x et y dans f par $\rho \cos \varphi$ et $\rho \sin \varphi$.

On obtient

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f}(\rho, \varphi) & = & f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \\ & = & (\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2 + 2\rho \cos \varphi \\ & = & \rho^2 + 2\rho \cos \varphi. \end{array}$$

Exercice

Énoncé – *Exprimer la fonction*

$$f(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, z^2\right)$$

en coordonnées cylindriques et sphériques.

Réponse – En coordonnées cylindriques :

$$\tilde{f}(\rho, \varphi, z) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) = \left(\rho, z^2\right)$$

En coordonnées sphériques :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\tilde{f}}(r, \varphi, \theta) & = & f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) \\ & = & \left(r \sin \theta, r^2 \cos^2 \theta\right) \end{array}.$$

Chapitre 2
Dérivées, Taylor, extrema locaux

Dans ce chapitre:

2.1 – Limites et continuité

Dans cette section:

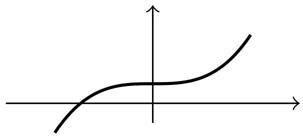
- Rappels sur les fonctions d'une variable
- Limites de fonctions
- Fonctions continues

Rappels sur les fonctions d'une variable

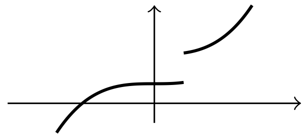
Rappel – Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable, avec domaine D_f, on dit que:

• la **limite de f en un point** $a \in D_f \cup \partial D_f$ est la valeur $\lim_{x \to a} f(x)$ à laquelle tend $f(x)$ quand x s'approche de a;

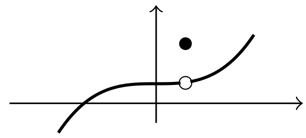
• f **est continue** en un point $a \in D_f$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.



continue



$\lim_{gauche} \neq \lim_{droite}$



$\lim_{gauche} = \lim_{droite} \neq f(a)$

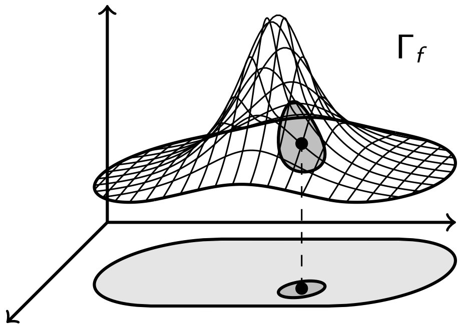
Limites des fonctions

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de plusieurs variables, de domaine D_f.

• La **limite de f en un point** $\vec{a} \in D_f \cup \partial D_f$ est la valeur à laquelle tend $f(\vec{x})$ quand $\vec{x}$ s'approche de $\vec{a}$ <u>par tous les chemins possibles dans D_f</u>.

On la note

$$\boxed{\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}).}$$



La limite peut ne pas exister, mais si elle existe elle est unique.

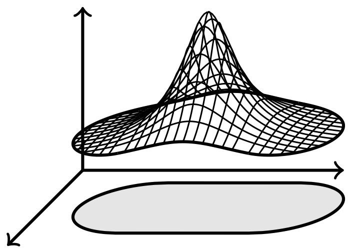
Fonctions continues

- La fonction f est **continue en** $\vec{a} \in D_f$ si

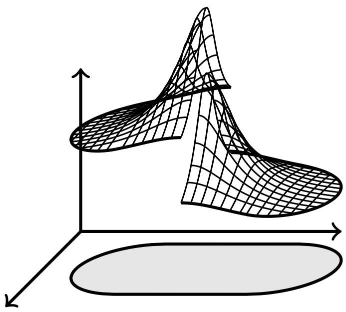
$$\boxed{\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a}).}$$

- La fonction f est **continue sur le sous-ensemble** $D \subset D_f$ si f est continue en tout point de D.

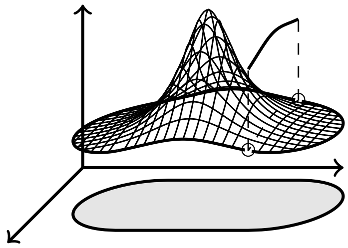
Le graphe d'une fonction continue n'a pas de "sauts" !



continue



non continue



non continue

Quelles fonctions sont-elles continues ?

Théorème – *Toutes les fonctions de plusieurs variables obtenues comme <u>somme, produit ou composée</u> de fonctions continues d'une variable sont continues.*

Quelques fonctions continues –

- Les fonctions polynomiales de plusieurs variables sont continues sur $\mathbb{R}^n$.
- Les fractions rationnelles, les racines, les exponentielles et les logarithmes, les fonctions circulaires, les fonctions hyperboliques et leurs réciproques sont continues sur leur domaine de définition.

2.2 – Dérivées partielles

Dans cette section:

- Rappels sur les fonctions d'une variable
- dérivées partielles
- fonctions (continûment) différentiables

Rappels sur les fonctions d'une variable

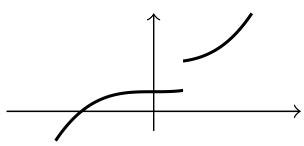
Rappel – Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable, la **dérivée** de f en $x \in D_f$ est la limite

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

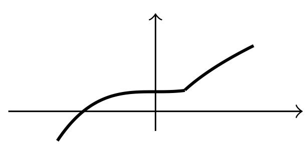
si elle existe et est finie. Dans ce cas, f est **dérivable en** x.
La fonction f est **dérivable sur** $D \subset D_f$ si elle est dérivable en tout point $x \in D$.

Propriété – *Une fonction dérivable est continue.*

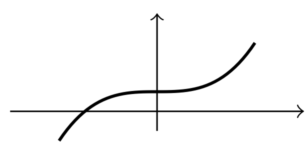
Le contraire est faux:



non continue



continue, non dérivable



dérivable

Dérivées partielles

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction.

- Les **dérivées partielles de** f **en** $\vec{x} \in D_f$ sont les limites

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f\big(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n\big) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}}$$

pour $i = 1, \dots, n$ (si ces limites existent).

- Les **dérivées partielles de** f sont les fonctions

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m : \ \vec{x} \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})} \qquad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

définies sur l'ensemble de points $\vec{x}$ où les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ existent.

Fonctions (continûment) différentiables

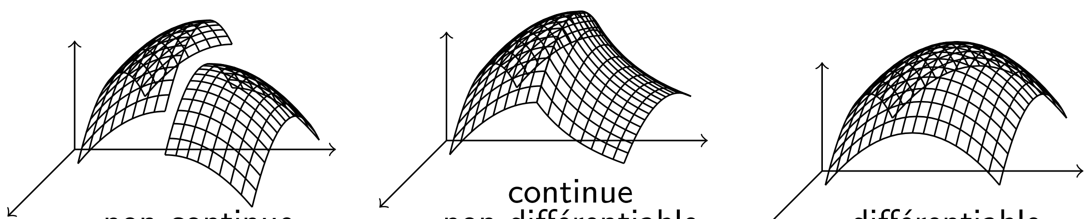
- La fonction f est **(continûment) différentiable sur** $D \subset D_f$, ou **de classe** C^1 **sur** D, si toutes les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

existent et sont des fonctions continues en tout point $\vec{x} \in D$.

Propriété – *Une fonction différentiable est continue.*

Le contraire est faux: le graphe d'une fonction différentiable n'a pas de "sauts" et en plus ne change pas son allure "brusquement"!



non continue — continue non différentiable — différentiable

Exemples de fonctions différentiables

Exemples –

- Pour $f(x,y) = xy^2 + 3x$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 3 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$$

qui sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

- Pour $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 + 3x \\ z^2 \end{pmatrix}$ on a

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} y^2 + 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \end{pmatrix}$$

donc g est C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

- Pour $h(r,\varphi,\theta) = \varphi^2 + r\sin\theta$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \sin\theta, \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 2\varphi \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

donc h est C^1 sur $[0,\infty[\times[0,2\pi[\times[0,\pi]$.

2.3 – Dérivées directionnelles

Dans cette section:

- Dérivées directionnelles
- Croissance et décroissance des fonctions réelles

Dérivées directionnelles

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$.

Définition – Pour tout vecteur $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, on appelle **dérivée directionnelle de f dans la direction** $\vec{v}$ la fonction

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \partial_{\vec{v}} f : D & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \vec{x} & \longmapsto & \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{array}}$$

Nota –
Dérivées partielles = dérivées directionnelles dans la direction des vecteurs

$$\vec{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0),$$

où 1 est en $i$ème position,

c'est-à-dire $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{\vec{e}_i} f}$.

Exemples de dérivées directionnelles

Exemples – Cherchons la dérivée directionnelle des fonctions suivantes, dans la direction d'un vecteur générique $\vec{v}$.

- $f(x, y) = xy^2 + 3x$

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 + 3 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy.$$

Alors, pour tout vecteur de direction $\vec{v} = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, la dérivée directionnelle de f est la fonction

$$\partial_{\vec{v}} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui vaut, au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\partial_{\vec{v}} f(x, y) = (y^2 + 3)\, u + 2xy\, v.$$

Exemples (suite)

- $g(x, y, z) = (xy^2 + 3x, yz^2)$

La fonction $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a dérivées partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} y^2 + 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2xy \\ z^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2yz \end{pmatrix}.$$

Pour tout $\vec{v} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée directionnelle $\partial_{\vec{v}} g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vaut donc

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{v}} g(x, y, z) &= \begin{pmatrix} y^2 + 3 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 2xy \\ z^2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 2yz \end{pmatrix} w \\ &= \begin{pmatrix} (y^2 + 3)\, u + 2xy\, v \\ z^2\, v + 2yz\, w \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

À noter que si on écrit $g = (g_1, g_2)$, on a

$$\partial_{\vec{v}} g = (\partial_{\vec{v}} g_1, \partial_{\vec{v}} g_2) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Exemples (suite)

- $h(r, \varphi, \theta) = \varphi^2 + r \sin\theta$

La fonction $h : [0, \infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ a dérivées partielles

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 2\varphi \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = r\cos\theta,$$

donc pour tout $\vec{v} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée directionnelle de h est la fonction

$$\partial_{\vec{v}} h : [0, \infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui vaut

$$\partial_{\vec{v}} h(r, \varphi, \theta) = \sin\theta\, u + 2\varphi\, v + r\cos\theta\, w.$$

Croissance et décroissance des fonctions réelles

Théorème – *Soit* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction réelle de classe* C^1 *sur* $D \subset \mathbb{R}^n$. *Pour tout* $\vec{x} \in D$ *et tout* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, *on a:*

- *Si* $\boxed{\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) > 0}$ *alors* f *est croissante au point* $\vec{x}$ *dans la direction de* $\vec{v}$.
- *Si* $\boxed{\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) < 0}$ *alors* f *est décroissante au point* $\vec{x}$ *dans la direction de* $\vec{v}$.

De plus:

- forte croissance $\iff$ grande dérivée positive
- forte décroissance $\iff$ grande dérivée négative

Nota – On ne peut rien dire sur la croissance de f si $\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = 0$!

Exercice

Énoncé – *La fonction* $f(x,y) = xy^2 + 3x$ *est-elle croissante ou décroissante au point* $(3,1)$, *dans les directions* $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,-1)$ *et* $(1,-2)$ *?*

Réponse – Pour tout vecteur $\vec{v} = (u,v)$, on a

$$\partial_{\vec{v}} f(x,y) = (y^2+3)\,u + 2xy\,v$$

et donc

$$\partial_{\vec{v}} f(3,1) = 4\,u + 6\,v$$

d'où

- $\partial_{(1,1)} f(3,1) = 10 \quad \Rightarrow \quad f$ croissante en direction $(1,1)$
- $\partial_{(1,2)} f(3,1) = 16 \quad \Rightarrow \quad f$ croissante en direction $(1,2)$
- $\partial_{(1,-1)} f(3,1) = -2 \quad \Rightarrow \quad f$ décroissante en dir. $(1,-1)$
- $\partial_{(1,-2)} f(3,1) = -8 \quad \Rightarrow \quad f$ décroissante en dir. $(1,-2)$

Exercice

Énoncé (suite) – *Parmi ces quatre directions, quelle est celle de plus forte croissance et celle de plus forte décroissance ?*

Réponse – Pour comparer la croissance d'une fonction en différentes directions, il faut calculer les différentes dérivées directionnelles avec des vecteurs ayant tous la même longueur, par exemple 1.

Directions croissantes –

- $\|(1,1)\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)} f(3,1) = \dfrac{10}{\sqrt{2}}$
- $\|(1,2)\| = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)} f(3,1) = \dfrac{16}{\sqrt{5}}$

Or $\quad \frac{10}{\sqrt{2}} < \frac{16}{\sqrt{5}} \quad$ car $\quad (10\sqrt{5})^2 = 500 < (16\sqrt{2})^2 = 512.$

Ainsi, au point $(3,1)$, le fonction f croit plus rapidement dans la direction $(1,2)$.

Exercice

Directions décroissantes –

- $\|(1,-1)\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)} f(3,1) = -\dfrac{2}{\sqrt{2}}$
- $\|(1,-2)\| = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)} f(3,1) = -\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

On a $\quad -\frac{2}{\sqrt{2}} > -\frac{8}{\sqrt{5}} \quad$ car ceci se vérifie ssi $\quad \frac{2}{\sqrt{2}} < \frac{8}{\sqrt{5}},$

ce qui est vrai car $\quad (2\sqrt{5})^2 = 20 < (8\sqrt{2})^2 = 128.$

Ainsi, au point $(3,1)$, le fonction f décroit plus rapidement dans la direction $(1,-2)$.

2.4 – Gradient

Dans cette section:

- Gradient des fonctions réelles
- Interpretation géométrique du gradient

Gradient d'une fonction réelle

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction <u>réelle</u> différentiable sur $D \subset D_f$.

• Le **gradient de** f **en un point** $\vec{x} \in D$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla} f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\ \vec{e}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\ \vec{e}_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}}$$

où le symbole $\vec{\nabla}$ se lit **nabla**.

• Le **gradient de** f est la fonction <u>vectorielle</u>

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \equiv \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n}$$

Pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ on a alors $\boxed{\partial_{\vec{v}} f = \langle \vec{\nabla} f, \vec{v} \rangle = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v}}$.

Exemples de gradient

Exemples –

- $f(x,y) = xy^2 + 3x \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2+3 \\ 2xy \end{pmatrix}$

Par exemple: $\vec{\nabla} f(0,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla} f(3,2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$.

- $f(x,y,z) = \sin(xy) + \ln(x^2+z^2) \quad \Rightarrow$

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) + \frac{2x}{x^2+z^2} \\ x\cos(xy) \\ \frac{2z}{x^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

Par exemple: $\vec{\nabla} f(0,\pi,1) = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Interprétation géométrique du gradient

Théorème – *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de <u>deux variables</u>, différentiable sur $D \subset \mathbb{R}^2$. Pour tout $\vec{x} \in D$ on a alors:*

- *Le gradient $\vec{\nabla} f(\vec{x})$ est orthogonal à la ligne de niveau $L_a(f)$ avec $a = f(\vec{x})$.*

- *Le gradient $\vec{\nabla} f(\vec{x})$ indique la direction de la pente de plus forte croissante du graphe Γ_f en $\vec{x}$.*

Exemple: interpretation géométrique du gradient

Exemple – $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \quad \Longrightarrow$

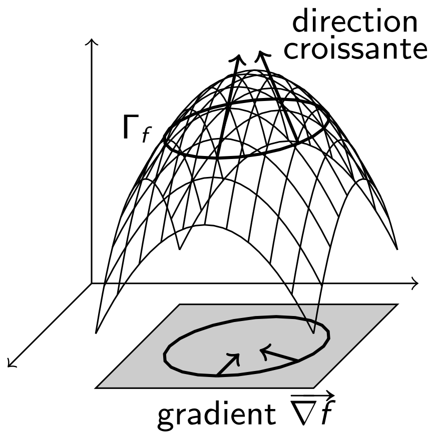
domaine $D_f = \overline{D}_O(1)$ = disque unitaire fermé

ligne de niveau $L_a(f)$ = cercle de rayon $\sqrt{1-a^2}$, où $a \in [0,1]$

f est différentiable sur $D = D_O(1)$ = disque unitaire ouvert, et

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{a}(x,y).$$

Pour tout $a \in]0,1[$, ce vecteur est orthogonal au cercle $L_a(f)$ au point (x,y) et est dirigé vers le centre du cercle.



2.5 – Différentielle

Dans cette section:

- Différentielle des fonctions
- Différentielle des fonctions réelles: dx, dy et dz
- Différentielle des coordonnées cylindriques et sphériques: $d\rho$, $d\varphi$, dr et $d\theta$

Différentielle d'une fonction en un point

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable sur l'ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$. Par définition, pour tout $\vec{x} \in D$, l'application

$$\begin{array}{rccl} \partial_\bullet f(x) : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \vec{v} & \longmapsto & \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\, v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\, v_n \end{array}$$

est <u>linéaire dans la variable $\vec{v}$</u>.

Définition – Cette application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ s'appelle **différentielle de f au point** $\vec{x}$.

Il est d'usage de la noter $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

En somme, pour tout $\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, on a donc

$$\boxed{df_{\vec{x}}(\vec{v}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\; v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\; v_n = \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}).}$$

Différentielle en un point: cas particuliers

Cas particuliers –

• Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction <u>réelle</u>, la différentielle $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit au moyen du gradient de f:

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \qquad \boxed{df_x(\vec{v}) = \langle \vec{\nabla} f(x), \vec{v} \rangle}$$

• Si $f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction d'<u>une seule variable</u> x, la différentielle $df_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vaut:

$$\forall v \in \mathbb{R}, \qquad \boxed{df_x(v) = \Big(f_1'(x)\, v \;, \ldots ,\; f_m'(x)\, v \Big)}$$

Exemples de différentielles

Exemples –

- $f(x) = x^2 - x^5 \quad \Rightarrow \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad df_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $df_x(v) = (2x - 5x^4)\, v.$

- $f(x,y) = x^2y^3 - 7y \quad \Rightarrow \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$df_{(x,y)}(u,v) = 2xy^3\, u + (3x^2y^2 - 7)\, v.$$

Par exemple:

$$df_{(x,y)}(2,1) = 4xy^3 + 3x^2y^2 - 7$$
$$df_{(1,1)}(u,v) = 2u - 4v$$
$$df_{(1,1)}(2,1) = 0 \qquad \text{(quelle coincidence !)}$$

Exemples de différentielles (suite)

- $f(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \end{array}$

$$df_{(x,y)}(u,v) = u \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2xy \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2\, u + 2xy\, v \\ v \\ 2x\, u - 2y\, v \end{pmatrix}$$

- $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ yz^3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ df_{(x,y,z)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \end{array}$

$$df_{(x,y,z)}(u,v,w) = u \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2xy \\ z^3 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 3yz^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} y^2\, u + 2xy\, v \\ z^3\, v + 3yz^2\, w \end{pmatrix}$$

Applications linéaires élementaires

Remarque –

- Les n applications linéaires (pour $i = 1, \ldots, n$)

$$\boxed{dx_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \ \vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto dx_i(\vec{v}) = v_i}$$

formant une *base* de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

- Par conséquent, toute application linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit comme *combinaison linéaire* des dx_i:

$$L = a_1\, dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n \quad \text{avec } a_i \in \mathbb{R}.$$

- Il n'y a pas n applications linéaires

$$"dx_i" : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad (\text{pour } i = 1, \ldots, n)$$

qui forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, parce que cet espace a dimension $n \times m$!

Différentielle

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable sur $D \subset \mathbb{R}^n$. L'application

$$\boxed{\begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^n & ! \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ \vec{x} & \longmapsto & df_{\vec{x}} \end{array}}$$

s'appelle **différentielle** de f et est notée df.

Corollaire – Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle, alors:

- La différentielle $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ en $\vec{x} \in D$ s'écrit

$$\boxed{df_{\vec{x}} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\ dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\ dx_n.}$$

- La différentielle $df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ s'écrit

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\ dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\ dx_n.}$$

Exemples: écriture usuelle des différentielles

Exemples –

- $f(x) = x^2 - x^5 \quad \Rightarrow \quad df_x = (2x - 5x^4)\, dx.$

Par exemple: $df_1 = -3\, dx$.

- $f(x,y) = x^2y^3 - 7y \quad \Rightarrow \quad df_{(x,y)} = 2xy^3\, dx + (3x^2y^2 - 7)\, dy.$

Par exemple: $df_{(1,1)} = 2\, dx - 4\, dy$.

- $f(x,y,z) = x^2y^3z - 7yz^2 \quad \Rightarrow$

$$df_{(x,y,z)} = 2xy^3z\ dx + (3x^2y^2z - 7z^2)\ dy + (x^2y^3 - 14yz)\ dz$$

Par exemple: $df_{(1,1,1)} = 2\ dx - 4\ dy - 13\ dz$

Exercice

Énoncé – *Pour la fonction $f(x,y) = \ln(1 - x^2 + 5y)$:*

1) *Déterminer l'ensemble D où f est différentiable.*
2) *Déterminer la différentielle en tout point $(x,y) \in D$.*
3) *Calculer $df_{(2,0)}$ en les vecteurs $\vec{\imath} = (1,0)$, $\vec{\jmath} = (0,1)$, $\vec{v} = (1,1)$ et $\vec{u} = (3,-3)$.*

Réponse –

1) $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5} \right\}$

portion du plan au-dessus de la parabole d'éq.

$$y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}$$

Exercice (suite)

2) Pour tout $(x, y) \in D$, on a

$$\begin{aligned} df_{(x,y)} &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ dx + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ dy \\ &= \frac{-2x}{1-x^2+5y}\ dx + \frac{5}{1-x^2+5y}\ dy \end{aligned}$$

3) Ainsi

$$df_{(2,0)} = \frac{-4}{1-4}\ dx + \frac{5}{1-4}\ dy = \frac{4}{3}\ dx - \frac{5}{3}\ dy$$

et

$$\begin{aligned} df_{(2,0)}(\vec{\imath}) &= df_{(2,0)}(1,0) = \tfrac{\partial f}{\partial x}(2,0) = \tfrac{4}{3} \\ df_{(2,0)}(\vec{\jmath}) &= df_{(2,0)}(0,1) = \tfrac{\partial f}{\partial y}(2,0) = -\tfrac{5}{3} \\ df_{(2,0)}(\vec{v}) &= df_{(2,0)}(1,1) = \tfrac{4}{3} - \tfrac{5}{3} = -\tfrac{1}{3} \\ df_{(2,0)}(\vec{u}) &= df_{(2,0)}(3,-3) = \tfrac{4}{3}\ 3 - \tfrac{5}{3}(-3) = 4 + 5 = 9 \end{aligned}$$

Exercice : dx, dy, dz, $d\rho$, $d\varphi$, dr et $d\theta$

Énoncé – *On note (x, y, z), (ρ, φ, z) et (r, φ, θ) les coordonnées cartesiennes, cylindriques et sphériques des points de $\mathbb{R}^3$. On rappelle que*

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\end{array}$$

et

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} r \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\\ \theta \in]0, \pi[\end{array}$$

Exercice (suite)

Montrer que

$$i)\ \begin{cases} dx = \cos\varphi \ d\rho - \rho \sin\varphi \ d\varphi \\ dy = \sin\varphi \ d\rho + \rho\cos\varphi \ d\varphi \\ dz = dz \end{cases}$$

$$i')\ \begin{cases} d\rho = \cos\varphi \ dx + \sin\varphi \ dy \\ \rho d\varphi = -\sin\varphi \ dx + \cos\varphi \ dy \\ dz = dz \end{cases}$$

Formules de passage *cartésiennes* $\longleftrightarrow$ *cylindriques*

Exercice (suite)

$$ii)\ \begin{cases} dx = \cos\varphi \ \sin\theta \ dr - r\sin\varphi \ \sin\theta \ d\varphi + r\cos\varphi\cos\theta \ d\theta \\ dy = \sin\varphi \ \sin\theta \ dr + r\cos\varphi \ \sin\theta \ d\varphi + r\sin\varphi \ \cos\theta \ d\theta \\ dz = \cos\theta \ dr - r\sin\theta \ d\theta \end{cases}$$

$$ii')\ \begin{cases} dr = \cos\varphi \ \sin\theta \ dx + \sin\varphi \ \sin\theta \ dy + \cos\theta \ dz \\ r\sin\theta \ d\varphi = -\sin\varphi \ dx + \cos\varphi \ dy \\ rd\theta = \cos\varphi \ \cos\theta \ dx + \sin\varphi \ \cos\theta \ dy + \sin\theta \ dz \end{cases}$$

Formules de passage *cartésiennes* $\longleftrightarrow$ *sphériques*

Exercice (suite)

$$(iii)\begin{cases} dr = \sin\theta\ d\rho + \cos\theta\ dz \\ \\ d\varphi = d\varphi \\ \\ rd\theta = \cos\theta\ d\rho - \sin\theta\ dz \end{cases}$$

$$(iii')\begin{cases} d\rho = \sin\theta\ dr + \cos\theta\ d\theta \\ \\ d\varphi = d\varphi \\ \\ dz = r\cos\theta\ dr - r\sin\theta\ d\theta \end{cases}$$

Formules de passage *cylindriques* $\longleftrightarrow$ *sphériques*

Exercice (suite et fin)

Réponse – Il suffit d'écrire les différentielles des applications de changement de variables. Par exemple la différentielle du changement de variables *cylindriques* $\to$ *cartésiennes* donne les formules i):

$$\begin{aligned} dx &= \tfrac{\partial x}{\partial \rho}\ d\rho + \tfrac{\partial x}{\partial \varphi}\ d\varphi + \tfrac{\partial x}{\partial z}\ dz \\ &= \cos\varphi\ d\rho - \rho\sin\varphi\ d\varphi \\ dy &= \tfrac{\partial y}{\partial \rho}\ d\rho + \tfrac{\partial y}{\partial \varphi}\ d\varphi + \tfrac{\partial y}{\partial z}\ dz \\ &= \sin\varphi\ d\rho + \cos\varphi\ d\varphi \\ dz &= \tfrac{\partial z}{\partial \rho}\ d\rho + \tfrac{\partial z}{\partial \varphi}\ d\varphi + \tfrac{\partial z}{\partial z}\ dz \\ &= dz \end{aligned}$$

Les formules i') s'obtiennent en inversant le système i). On procède dela même façon our les autres formules.

2.6 – Jacobienne

Dans cette section:

- Rappel sur les applications linéaires et les matrices
- Matrice Jacobienne et déterminant Jacobien
- Jacobien des changements de variables

Rappels sur les applications linéaires et les matrices

Rappel – Toute application linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se représente come une matrice $A = \big(a_{ij}\big) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ (avec m lignes et n colonnes) telle que, pour tout $\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} L(\vec{v}) &= A\ \vec{v} \quad \text{(produit matrice par vecteur)} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}\ v_1 + \cdots + a_{1n}\ v_n \\ \vdots \\ a_{m1}\ v_1 + \cdots + a_{mn}\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Matrice jacobienne

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction diff. sur D.

• La **matrice Jacobienne de** f est la matrice $J_f \in \mathcal{M}_{mn}$ associée à df, c'est à dire telle que

$$\boxed{df_{\vec{x}}(\vec{v}) = J_f(\vec{x})\ \vec{v}} \qquad \text{pour tout } \vec{x} \in D \text{ et tout } \vec{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Si $(f_1, \ldots, f_m)$ sont les composantes de f, on a alors

$$\boxed{J_f(\vec{x}) \ = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}).}$$

• Si la matrice Jacobienne est carrée ($n = m$), son détérminant $\mathrm{Jac}\, f = \det J_f$ s'appelle **Jacobien de** f.

Exemples de matrices jacobiennes

Exemples –

• Si $\quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 y,$

on a

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{R})$$

une matrice ligne.

• Si $\quad \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 :\ t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (2t, t^3 + 1),$

on a

$$J_g(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$$

une matrice colonne, c'est-à-dire un vecteur.

Exemples de matrices jacobiennes

- Si $\quad h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $\quad (u,v) \mapsto h(u,v) = \big(h_1(u,v), h_2(u,v)\big) = (u^2 v, 3u),$

on a

$$J_h(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial u} & \dfrac{\partial h_1}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial h_2}{\partial u} & \dfrac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2uv & u^2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$$

et

$$\mathrm{Jac}\, h(u,v) = \frac{\partial h_1}{\partial u}\frac{\partial h_2}{\partial v} - \frac{\partial h_2}{\partial u}\frac{\partial h_1}{\partial v} = -3u^2$$

- Si $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \mapsto g(z) = \sin z,$

on a

$$J_g(z) = \big(g'(z)\big) = \big(\cos z\big) \in \mathcal{M}_{11}(\mathbb{R})$$

et

$$\mathrm{Jac}\, g(z) = g'(z) = \cos z \in \mathbb{R}$$

Exemples: Jacobien des changements de variables

- **Polaires :** $\quad h(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$

$$J_h(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Jac}\, h(\rho,\varphi) = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

- **Cylindriques :** $\quad h(\rho,\varphi,z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$

$$J_h(\rho,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Jac}\, h(\rho,\varphi,z) = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

Exemples: Jacobien des changements de variables

- **Sphériques :** $h(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$

$$J_h(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac}\, h &= \cos\theta\Big(-r^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta - r^2\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta\Big) \\ &\quad - r\sin\theta\Big(r\cos^2\varphi\sin^2\theta + r\sin^2\varphi\sin^2\theta\Big) \\ &= -r^2\sin\theta\cos^2\theta - r^2\sin^3\theta \\ &= -r^2\sin\theta \end{aligned}$$

Exercice

Énoncé – *Calculer le gradient, la différentielle et la matrice jacobienne de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par*

$$f(x,y,z) = z\ \sin(xy).$$

Réponse – On a

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz\ \cos(xy) \\ xz\ \cos(xy) \\ \sin(xy) \end{pmatrix}$$

$$df_{(x,y,z)} = yz\ \cos(xy)\ dx + xz\ \cos(xy)\ dy + \sin(xy)\ dz$$

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz\ \cos(xy) & xz\ \cos(xy) & \sin(xy) \end{pmatrix}$$

Exercice

Énoncé – *Calculer la différentielle et la matrice Jacobienne de la fonction* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *donnée par*

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \sin x \\ z \sin y \end{pmatrix}.$$

Réponse – Pour tout $\vec{v} = (u,v,w) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$df_{(x,y,z)}(u,v,w) = \begin{pmatrix} z \cos x \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ z \cos y \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} \sin x \\ \sin y \end{pmatrix} w$$

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & z \cos y & \sin y \end{pmatrix}$$

2.7 – Resumé sur les dérivées

Dans cette section:

- Resumé sur les dérivées des fonctions réelles
- Resumé sur les dérivées des fonctions vectorielles

Resumé: dérivées des fonctions réelles

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle diff. sur $D \subset \mathbb{R}^n$:

- **dérivées partielles**
  = fonctions réelles

  $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : D \longrightarrow \mathbb{R}}$

- **dérivées directionelles**
  = fonctions réelles

  $\boxed{\partial_{\vec{v}} f : D \longrightarrow \mathbb{R}}$

  $\partial_{\vec{v}} f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$

- **gradient**
  = fonction vectorielle

  $\boxed{\vec{\nabla} f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n}$ $\quad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

- **différentielle**
  = fonction à valeur
  applications linéaires

  $\boxed{df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$

  $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$

- **Jacobienne**
  = fonction à valeur
  matrices ligne

  $\boxed{J_f : D \longrightarrow \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})}$

  $J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Resumé: dérivées des fonctions vectorielles

Si $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est fonction vectorielle diff. sur D:

- **dérivées partielles**
  = fonctions vectorielles

  $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : D \longrightarrow \mathbb{R}^m}$

  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \right)$

- **dérivées directionelles**
  = fonctions vectorielles

  $\boxed{\partial_{\vec{v}} f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m}$

  $\partial_{\vec{v}} f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$

- **gradient** "$\vec{\nabla} f$" n'est pas défini

- **différentielle**
  = fonction à valeur
  applications linéaires

  $\boxed{df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}$

  mais les "dx_i" n'existent pas

- **Jacobienne**
  = fonction à valeur
  dans les matrices

  $\boxed{J_f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})}$

  $J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

2.8 – Règle de la chaîne

Dans cette section:

- Dérivées de la somme et du produit de fonctions
- Dérivées de la composée de fonctions
- Transformation des dérivées partielles: $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \rho}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial}{\partial r}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$

Dérivées de la somme de fonctions et du produit par scalaire

Proposition – *Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sont différentiables, on a :*

- $\boxed{\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \dfrac{\partial g}{\partial x_i}}$ *pour tout $i = 1, \ldots, n$*

Par conséquent $\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$ *(si $m=1$),*

$$d(f+g) = df + dg, \quad J_{f+g} = J_f + J_g$$

- $\boxed{\dfrac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i} = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_i}}$ *pour tout $i = 1, \ldots, n$ où $\lambda \in \mathbb{R}$*

Par conséquent $\vec{\nabla}(\lambda f) = \lambda \vec{\nabla} f$ *(si $m=1$),*

$$d(\lambda f) = \lambda\, df, \quad J_{\lambda f} = \lambda J_f$$

Dérivées du produit de fonctions

Proposition – *Si $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions* <u>*réelles*</u> *différentiables, on a la* **règle de Leibniz***:*

- $\boxed{\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\, g + f\, \dfrac{\partial g}{\partial x_i}}$ *pour tout* $i = 1, \dots, n$

Par conséquent

$$\vec{\nabla}(fg) = \big(\vec{\nabla} f\big) g + f\big(\vec{\nabla} g\big),$$

$$d(fg) = \big(df\big) g + f\big(dg\big),$$

$$J_{fg} = \big(J_f\big) g + f\big(J_g\big)$$

Exemple : règle de Leibniz

Exemple – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy^2\, e^{xy}$. Le calcul de la différentielle de f peut se faire directement au moyen de la formule

$$d\Big(xy^2\, e^{xy}\Big) = \frac{\partial\big(xy^2\, e^{xy}\big)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial\big(xy^2\, e^{xy}\big)}{\partial y}\, dy$$

ou en passant par la règle de Leibniz

$$\begin{aligned} d\Big(xy^2\, e^{xy}\Big) &= d\big(xy^2\big)\, e^{xy} + xy^2\, d\big(e^{xy}\big) \\ &= \big(y^2\, dx + 2xy\, dy\big)\, e^{xy} \\ &\quad + xy^2\, \big(y\, e^{xy}\, dx + x\, e^{xy}\, dy\big) \\ &= \big(y^2 + xy^3\big)\, e^{xy}\, dx + \big(2xy + x^2y^2\big)\, e^{xy}\, dy \end{aligned}$$

Dérivées des fonctions composées

Proposition – *Pour deux fonctions*

$$\begin{aligned} f &= (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \textit{différentiable en } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \\ g &= (g_1, \dots, g_p) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \quad \textit{différentiable en } \vec{y} = f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

la composée $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $\vec{x}$ et on a la **règle de la chaîne** *:*

- $$\boxed{\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial g_j}{\partial y_1}\big(f(\vec{x})\big)\, \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\vec{x}) + \cdots + \frac{\partial g_j}{\partial y_m}\big(f(\vec{x})\big)\, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\vec{x})}$$

pour tout $i = 1, \dots, n$ et tout $j = 1, \dots, p$,.

Par conséquent, on a aussi :

$d\big(g \circ f\big)_{\vec{x}} = dg_{f(\vec{x})} \circ df_x$ *(composition d'applications linéaires)*

$J_{g \circ f}(\vec{x}) = J_g\big(f(\vec{x})\big) \cdot J_f(\vec{x})$ *(produit de matrices)*

Cas usuels de fonctions composées

- **Cas usuel 1 –**

Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y) = z$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \mapsto g(z)$

$g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto g\big(f(x, y)\big)$

on a

$$\boxed{\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x}(x,y) &= \frac{d\, g}{d\, z}\big(f(x,y)\big)\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial (g \circ f)}{\partial y}(x,y) &= \frac{d\, g}{d\, z}\big(f(x,y)\big)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{aligned} \right.}$$

$$d\big(g \circ f\big)_{(x,y)} = \tfrac{d\, g}{d\, z}\big(f(x,y)\big)\ df_{(x,y)}$$

$$J_{g \circ f}(x,y) = \tfrac{d\, g}{d\, z}\big(f(x,y)\big)\ J_f(x,y)$$

Exercice: cas usuel 1

Énoncé – *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction dont on connait*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy \quad \textit{et} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 - 2y.$$

Pour $\quad F(x,y) = \ln f(x,y), \quad$ *calculer* $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial F}{\partial y}$.

Réponse – Si on pose $\quad g(z) = \ln z, \quad$ on a $F = g \circ f$ et donc

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \tfrac{dg}{dz}(f(x,y))\, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{f(x,y)}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \tfrac{dg}{dz}(f(x,y))\, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2 - 2y}{f(x,y)}$$

Cas usuels de fonctions composées

- **Cas usuel 2 –**

Si $\quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)$

$\quad h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (u,v) \mapsto h(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$

$\quad f \circ h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (u,v) \mapsto f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$

on a

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial (f\circ h)}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\[2ex] \dfrac{\partial (f\circ h)}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{cases}}$$

$$d\big(f\circ h\big)_{(u,v)} = df_{h(u,v)} \circ dh_{(u,v)}$$

$$J_{f\circ h}(u,v) = J_f\big(h(u,v)\big)\ J_h(u,v)$$

Exercice: cas usuel 2

Énoncé – *Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont on connait*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 - 2y.$$

Pour $G(u,v) = f(v, uv^2)$, *calculer* $\frac{\partial G}{\partial u}$ *et* $\frac{\partial G}{\partial v}$.

Réponse – Si on pose $h(u,v) = (v, uv^2) = (x,y)$, c. à d. $x = v$ et $y = uv^2$, on a $G = f \circ h$ et donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(u,v)}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}(v, uv^2)\ \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(v, uv^2)\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\
&= 2v\, uv^2 \cdot 0 + (v^2 - 2uv^2) \cdot v^2 \\
&= (1-2u)v^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(u,v)}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}(v, uv^2)\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(v, uv^2)\ \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\
&= 2v\, uv^2 \cdot 1 + (v^2 - 2uv^2) \cdot 2uv \\
&= 4u(1-u)v^3
\end{aligned}$$

Cas usuels de fonctions composées

- **Cas usuel 3 –**

Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)$

$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$

$f \circ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto f\big(x(t), y(t)\big)$

on a

$$\boxed{\frac{d\,\big(f \circ \gamma\big)(t)}{d\,t} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(t)\big)\ \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(t)\big)\ \dot{y}(t)}$$

$$d\big(f \circ \gamma\big)_t = df_{\gamma(t)} \circ d\gamma_t$$

$$J_{f\circ\gamma}(t) = J_f\big(\gamma(t)\big)\ J_\gamma(t)$$

Exercice: cas usuel 3

Énoncé – *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction dont on connait*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 - 2y.$$

Pour $H(t) = f(t^2, 3t)$, *calculer* $\frac{d\,H(t)}{d\,t}$.

Réponse – Si on pose $\gamma(t) = (t^2, 3t) = (x, y)$,
c. à d. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 3t \end{cases}$, on a $H = f \circ \gamma$ et donc

$$\begin{aligned}
\frac{d\,H(t)}{d\,t} &= \frac{d\,(f\circ\gamma)(t)}{d\,t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t)\ \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t)\ \dot{y}(t) \\
&= 2t^2\,3t \cdot 2t + (t^4 - 6t) \cdot 3 \\
&= 15t^4 - 18t
\end{aligned}$$

Exercice

Énoncé – *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *la fonction* $f(x, y) = xy^2$.

1) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $g'(z) = \sqrt{z}$.
Calculer $\dfrac{\partial g(xy^2)}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial g(xy^2)}{\partial y}$.

Réponse – On veut calculer les dérivées de $g \circ f$, donc on applique la règle de la chaîne:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g(xy^2)}{\partial x} &= g'(xy^2)\ \frac{\partial (xy^2)}{\partial x} \\
&= \sqrt{xy^2}\ y^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g(xy^2)}{\partial y} &= g'(xy^2)\ \frac{\partial (xy^2)}{\partial y} \\
&= 2xy\,\sqrt{xy^2}
\end{aligned}$$

Exercice (suite)

2) Soit $(x, y) = h(u, v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$ *un changement de variables dont on connait la matrice Jacobienne*

$$J_h(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix},$$

et soit $\tilde{f} = f \circ h$. *Calculer* $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v)$ *et* $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u,v)$.

Réponse – On applique la règle de la chaîne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(h(u,v))\, \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(h(u,v))\, \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ &= y(u,v)^2 \cdot 0 + 2x(u,v)y(u,v)\, v^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(h(u,v))\, \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(h(u,v))\, \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ &= y(u,v)^2 \cdot 1 + 2x(u,v)y(u,v)\, 2uv \end{aligned}$$

Exercice (suite)

Réponse (suite)–

En alternative, on peut passer par les matrices Jacobiennes.
Puisque

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{aligned} J_{\tilde{f}}(u,v) &= J_f(h(u,v)) \cdot J_h(u,v) \\ &= \begin{pmatrix} y(u,v)^2 & 2x(u,v)y(u,v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y^2 \cdot 0 + 2xy \cdot v^2 & y^2 \cdot 1 + 2xy \cdot 2uv \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2v^2\, x(u,v)y(u,v) & y(u,v)^2 + 4uv\, x(u,v)y(u,v) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice (suite)

3) Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *une trajectoire dans* $\mathbb{R}^2$ *dépendante du paramètre* t*. Calculer la dérivée en* t *de la fonction* $t \mapsto f(x(t), y(t))$.

Réponse – On veut calculer la dérivée de la fonction $f \circ \gamma$, donc on applique la règle de la chaîne:

$$\begin{aligned} \frac{d\, f(x(t), y(t))}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)\, \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)\, \dot{y}(t) \\ &= y(t)^2 \quad \dot{x}(t) + 2\, x(t) y(t))\ \dot{y}(t) \end{aligned}$$

Exercice : transformation des dérivées partielles

Énoncé – *Soient* (x, y, z) *les coordonnées cartesiennes des points de* $\mathbb{R}^3$, (ρ, φ, z) *les coordonnées cylindriques et* (r, φ, θ) *les coordonnées sphériques. On rappelle que*

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{array} \right. \qquad \textit{et} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\end{array} \right. \qquad \textit{et} \qquad \left\{ \begin{array}{l} r \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\\ \theta \in]0, \pi[\end{array} \right.$$

Montrer que les derivées partielles $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$, $\left\{ \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ *et* $\left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\}$ *satisfont aux formules suivantes :*

Exercice (suite)

$$(i)\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial \rho} & = & \cos\varphi \, \frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi \, \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} & = & -\sin\varphi \, \frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi \, \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & = & \frac{\partial}{\partial z} \end{array}\right.$$

$$(i')\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial x} & = & \cos\varphi \, \frac{\partial}{\partial \rho} - \sin\varphi \, \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} & = & \sin\varphi \, \frac{\partial}{\partial \rho} + \cos\varphi \, \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} & = & \frac{\partial}{\partial z} \end{array}\right.$$

Exercice (suite)

$$(ii)\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial r} & = & \cos\varphi \ \sin\theta \, \frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi \ \sin\theta \, \frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta \, \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} & = & -\sin\varphi \, \frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi \, \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & = & \cos\varphi \ \cos\theta \, \frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi \ \cos\theta \, \frac{\partial}{\partial y} - \sin\theta \, \frac{\partial}{\partial z} \end{array}\right.$$

$$(ii')\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial x} & = & \cos\varphi\sin\theta \, \frac{\partial}{\partial r} - \sin\varphi \, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \cos\varphi\cos\theta \, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} & = & \sin\varphi\sin\theta \, \frac{\partial}{\partial r} + \cos\varphi \, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin\varphi\cos\theta \, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} & = & \cos\theta \, \frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta \, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{array}\right.$$

Exercice (suite)

$$(iii)\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial r} & = & \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial \rho}+\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} & = & \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta} & = & \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial \rho}-\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial z} \end{array}\right.$$

$$(iii')\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial \rho} & = & \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} & = & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} & = & \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}-\sin\theta\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{array}\right.$$

Exercice (suite)

Réponse – Montrons (i). Pour cela on applique la règle de la chaîne à la composée $\tilde{f} = f \circ h$ où $(x, y, z) = h(\rho, \varphi, z)$ est le changement de variables des coordonnées cylindriques en coordonnées cartésiennes. On a alors:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} & = & \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \rho}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial \rho} \\ & = & \cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} & = & \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ & = & -r\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} & = & \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial z} \\ & = & \frac{\partial f}{\partial z} \end{array}$$

d'où suivent les formules (i). Les formules (i') en découlent par inversion du système.

Exercice (suite)

- Pour montrer les formules (ii), on applique cette méthode à la composée $\tilde{f} = f \circ h$ où $(x, y, z) = h(r, \varphi, \theta)$ est le changement de variables des coordonnées sphériques en coordonnées cartésiennes. On a alors:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial r} \\
&= \cos\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} + \cos\theta \frac{\partial f}{\partial z} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\
&= -\rho\sin\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + \rho\cos\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial \theta} \\
&= r\cos\varphi\ \cos\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + r\sin\varphi\ \cos\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} - r\sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned}
$$

- On inverse le système (ii) pour obtenir (ii').
- On combine les (i) à (ii') pour obtenir (iii) et (iii').

2.9 – Hessienne

Dans cette section:

- Dérivées d'ordre supérieur
- Théorème de Schwarz
- Matrice Hessienne
- Laplacien, fonctions harmoniques

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition – Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont à leur tour différentiables, on peut calculer leurs dérivées partielles.

• Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les **dérivées partielles d'ordre** k **de** f sont les fonctions qu'on obtient en dérivant f succéssivement k fois:

$$\boxed{\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}.}$$

Par exemple, si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est fonction de (x, y), on a:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}$, $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$, $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$, $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$.

• La fonction f est **de classe** C^k si ses dérivées d'ordre k existent et sont des fonctions continues. La fonction f est **lisse** ou **de classe** C^∞ si elle est C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Théorème de Schwarz

Théorème – *Si les dérivées secondes* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *existent et sont continue en un point* $\vec{x}$*, pour tout* $i, j = 1, \ldots, n$*, alors*

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x})} \qquad \textit{pour tout } i \neq j.$$

Corollaire – *Si* f *est une fonction de classe* C^k *(ou lisse), alors toutes ses dérivées mixtes jusqu'à l'ordre* k *(ou* ∞*)*
ayant le même nombre de dérivées en chaque x_i*,*
coincident indépendement de l'ordre dans lequel elles sont calculées.

Exemple : dérivées secondes

Exemple – $f(x,y) = x^3y^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy^2 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x^2y \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6x^2y & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^3 \end{cases}$$

L'on constate que les dérivées partielles sont continues (donc f est de classe C^2) et que les dérivées mixtes sont identiques.

Exercice

Énoncé – *Soient $F, G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et soit $c \in \mathbb{R}^*$. Montrer que le fonction $u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$ est solution de l'***équation des ondes**

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0} \qquad \textit{pour tout } (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Réponse – La fonction u est de classe C^2 car composée de fonctions C^2. On a

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= F'(x-ct)\ \tfrac{\partial(x-ct)}{\partial x} + G'(x+ct)\ \tfrac{\partial(x+ct)}{\partial x} \\ &= F'(x-ct) + G'(x+ct) \\ \tfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= F'(x-ct)\ \tfrac{\partial(x-ct)}{\partial t} + G'(x+ct)\ \tfrac{\partial(x+ct)}{\partial t} \\ &= -c\,F'(x-ct) + c\,G'(x+ct) \end{aligned}$$

Exercice (suite)

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= F''(x-ct)\ \frac{\partial(x-ct)}{\partial x} + G''(x+ct)\ \frac{\partial(x+ct)}{\partial x}\\ &= F''(x-ct) + G''(x+ct),\\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= -c\,F''(x-ct)\ \frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + c\,G''(x+ct)\ \frac{\partial(x+ct)}{\partial t}\\ &= (-c)^2\,F''(x-ct) + c^2\,G''(x+ct).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0.$$

Matrice Hessienne

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 en $\vec{x}$.

• La **matrice Hessienne** de f en $\vec{x}$ est la matrice carrée de taille n contenant toutes les dérivées secondes de f en $\vec{x}$:

$$\boxed{H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\vec{x}) \end{pmatrix}}$$

Cette matrice est symétrique par le théorème de Schwarz.

• Son déterminant s'appelle le **Hessien** de f

$$\boxed{\mathrm{Hess}\, f(\vec{x}) = \det H_f(\vec{x})}$$

Exemple: matrice Hessienne

Exemple –

Pour $\quad g(x,y,z) = x\sin y + y\sin z, \quad$ on a

$$\vec{\nabla} g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin y \\ x\cos y + \sin z \\ y\cos z \end{pmatrix}$$

puis

$$H_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y & 0 \\ \cos y & -x\sin y & \cos z \\ 0 & \cos z & -y\sin z \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} \det H_g(x,y,z) &= -\cos y\,\Big(-y\cos y\sin z - 0\Big) \\ &= y\cos^2 y\sin z \end{aligned}$$

Exercice

Énoncé – *Montrer que le Hessien de la fonction*

$$f(x,y) = \sin(x-y)$$

est nul en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Réponse – On a

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x-y) \\ -\cos(x-y) \end{pmatrix}$$

puis

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x-y) & \sin(x-y) \\ \sin(x-y) & -\sin(x-y) \end{pmatrix}$$

d'où

$$\det H_f(x,y) = \big(-\sin(x-y)\big)^2 - \big(\sin(x-y)\big)^2 = 0$$

Laplacien

Définition – Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 au point $\vec{x} \in D$.

- Le **Laplacien** de f en $\vec{x}$ est la trace de la matrice Hessienne $H_f(\vec{x})$:

$$\boxed{\Delta f(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\vec{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\vec{x})}$$

- La fonction f est dite **harmonique** si

$$\boxed{\Delta f(\vec{x}) = 0} \qquad \text{en tout point } \vec{x} \in D.$$

Interprétation géométrique du Laplacien

Proposition – *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2. Si*

- *C est un carré de taille $h \times h$ contenu dans D, et*
- *$\mu(f, C)$ est la valeur moyenne de f sur C,*

alors, pour tout point $(a, b) \in C$, on a

$$\boxed{\mu(f, C) = f(a, b) + \frac{h^2}{24}\, \Delta f(a, b) + O(h^4)}$$

N.B. Moyenne au Ch.3: $\mu(f, C) = \dfrac{1}{h^2} \displaystyle\iint_C f(x, y)\, dx\, dy.$

Remarque – Cela signifie que la différence $f(a, b) - \mu(f, C)$ est <u>proportionnelle</u> à $\Delta f(a, b)$, et que la constante de proportionalité <u>ne dépend que de la taille du carré</u> où on calcule la moyenne $\mu(f, C)$.

Exercice

Énoncé – *Trouver les valeurs de $c \in \mathbb{R}^*$ pour lesquelles la fonction* $u(x,t) = x^2 - c^2t^2$ *est harmonique.*

Réponse – On a

$$\vec{\nabla} u(x,t) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2c^2 t \end{pmatrix}$$

puis

$$H_u(x,t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2c^2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$\Delta u(x,t) = 2 - 2c^2,$$

donc $\Delta u(x,t) = 0$ si et seulement si $c = \pm 1$.

Exercice

Énoncé – *Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $F(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$.*

1) Déterminer le Laplacien de F en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.

Réponse – Il s'agit de calculer $\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.
En utilisant la règle de la chaîne on trouve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x} \\ &= f'(\sqrt{x^2+y^2}) \, \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} \\ &= f'(\sqrt{x^2+y^2}) \, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial y} \\ &= f'(\sqrt{x^2+y^2}) \, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

Exercice (suite)

Puis, en utilisant aussi la règle de Leibniz, on trouve:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\
&= \frac{\partial f'(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\
&= f''(\sqrt{x^2+y^2})\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + f'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\\
&= f''(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}},
\end{aligned}$$

et de la même façon

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} = f''(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{y^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Exercice (suite)

On a donc

$$\begin{aligned}
\Delta F(x,y) &= \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}\\
&= f''(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\\
&= f''(\sqrt{x^2+y^2}) + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

Énoncé (suite) –

2) Trouver les fonctions f telles que $\Delta F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Réponse – En termes de f, l'équation s'écrit

$$f''(\sqrt{x^2+y^2}) + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

et dépend de la seule variable réelle $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$.

Exercice (suite)

- Finalement, on doit résoudre l'équation différentielle du 2ème ordre non homogène et à cœfficients non constants

$$(E) \qquad f''(r) + \frac{1}{r}\, f'(r) = r$$

- Pour cela, on transforme (E) en un système d'équations différentielles du 1er ordre:

$$\begin{cases} f'(r) = g(r) & (E1) \\ g'(r) + \frac{1}{r}\, g(r) = r & (E2) \end{cases}$$

On trouve g avec (E2) puis on reporte dans (E1) et on trouve f.

- Les solutions de (E2) sont de la forme $g = g_0 + g_p$, où g_0 est la solution générale de l'équation homogène associée

$$(E2^*) \qquad g_0'(r) + \frac{1}{r}\, g_0(r) = 0$$

et g_p est une solution particulière de (E2) obtenue par la méthode de la variation de la constante.

Exercice (suite)

- Explicitement, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(E2^*) \quad g_0(r) = \lambda\, e^{-\int \frac{1}{r}\, dr} = \lambda\, e^{-\ln r} = \lambda\, e^{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\lambda}{r}$$

- On pose $g_p(r) = \frac{\lambda(r)}{r}$, ce qui donne $g_p'(r) = \frac{\lambda'(r)}{r} - \frac{\lambda(r)}{r^2}$:

$$(E2) \quad g_p'(r) + \frac{1}{r}\, g_p(r) = r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda'(r)}{r} = r \quad \Leftrightarrow \quad \lambda'(r) = r^2$$

On peut choisir $\lambda(r) = \frac{r^3}{3}$, d'où $\quad g_p(r) = \frac{r^2}{3}$.

- On a donc $\quad g(r) = g_0(r) + g_p(r) = \frac{\lambda}{r} + \frac{r^2}{3}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Enfin, les solutions de (E) sont celles de (E1) :

$$(E1) \quad f'(r) = \frac{\lambda}{r} + \frac{r^2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad f(r) = \lambda \ln(r) + \frac{r^3}{9} + \mu$$

pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2.10 – Taylor

Dans cette section:

- Dévéloppement de Taylor
- Approximation et erreur relative

Théorème de Taylor

Théorème de Taylor –
Toute fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k autour d'un point $\vec{a}$ peut être approximée en tout point $\vec{x}$ proche de $\vec{a}$ par un polynôme de degré k en $\vec{x} - \vec{a}$, appellé **polynôme de Taylor**, *avec coefficients dépendant seulement des dérivées de f en $\vec{a}$.*

Rappel – Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ qui contient a, alors pour tout $x \in I$ on a

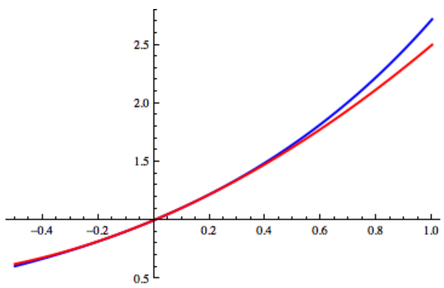
$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)\,(x-a)^2 + o\big((x-a)^2\big).$$

Par exemple, voici le graphe de

$$f(x) = e^x \quad \text{(en bleu)}$$

et celui de son polynôme de Taylor de degré 2 en $a = 0$,

$P(x) = 1 + x + x^2/2$ (en rouge).



Formule de Taylor en deux variables

Théorème de Taylor – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un disque $D \subset \mathbb{R}^2$ qui contient un point (a,b).
Alors, pour tout $(x,y) \in D$, on a

$$\boxed{\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + \tfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \tfrac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b) \\ &+\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(x-a)^2 + \tfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}\,(x-a)(y-b) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(y-b)^2 \\ &+o\big(||(x-a,y-b)||^2\big) \end{aligned}}$$

où $o(h)$ est une fonction qui tend vers zéro <u>plus vite</u> de $h \to 0$.

Écritures alternatives:

$$\text{terme à l'ordre 1} \quad = df_{(a,b)}(x-a,y-b) = J_f(a,b)\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix},$$

$$\text{terme à l'ordre 2} \quad = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x-a & y-b \end{pmatrix} H_f(a,b)\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}.$$

Exemple

Exemple – Soit $\quad f(x,y) = \dfrac{x-1}{y-1} \quad$ et $\quad (a,b) = (0,0)$.

On calcule $\quad f(0,0) = 1, \quad$ puis

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{y-1} & -\dfrac{x-1}{(y-1)^2} \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad J_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{(y-1)^2} \\ -\dfrac{1}{(y-1)^2} & \dfrac{2(x-1)}{(y-1)^3} \end{pmatrix}$$

d'où

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi: $\quad \dfrac{x-1}{y-1} = 1 - x + y - xy + y^2 + o\big(||(x,y)||^2\big).$

Exercice

Énoncé – *La pression P d'un gaz parfait est fonction de la temperature T et du volume V selon la loi*

$$P(T,V) = nR\,\frac{T}{V},$$

où n est la quantité de matière (moles) et R est la constante universelle d'un gaz parfait.

On voudrait connaitre la pression du gaz qui se trouve à l'état (T,V), mais la mesure de cet état nous donne les valeurs (T_0, V_0) avec une **erreure relative**

$$\left|\frac{T-T_0}{T_0}\right| < 0.005\,\% \qquad \textit{et} \qquad \left|\frac{V-V_0}{V_0}\right| < 0.002\,\%.$$

Quelle est l'erreure relative induite par cette mesure sur la valeur $P(V_0, T_0)$ de la pression?

Exercice (suite)

Réponse – On cherche une borne supérieur pour $\left|\frac{P-P_0}{P_0}\right|$, où $P = P(T,V)$ et $P_0 = P(T_0, V_0)$.

Pour cela, on utilise le dévéloppement de Taylor de $P(T,V)$ à l'ordre 1, autour de (T_0, V_0):

$$\begin{aligned} P - P_0 &\simeq dP_{(T_0,V_0)}(T-T_0, V-V_0) \\ &= \tfrac{\partial P}{\partial T}(T_0,V_0)\ (T-T_0) + \tfrac{\partial P}{\partial V}(T_0,V_0)\ (V-V_0) \\ &= nR\,\tfrac{T-T_0}{V_0} - nR\,\tfrac{T_0(V-V_0)}{V_0^2}. \end{aligned}$$

On a alors

$$\frac{P-P_0}{P_0} \simeq nR\,\frac{T-T_0}{V_0\,nR\,\frac{T_0}{V_0}} - nR\,\frac{T_0(V-V_0)}{V_0^2\,nR\,\frac{T_0}{V_0}} = \frac{T-T_0}{T_0} - \frac{V-V_0}{V_0}$$

d'où suit

$$\left|\frac{P-P_0}{P_0}\right| \leqslant \left|\frac{T-T_0}{T_0}\right| + \left|\frac{V-V_0}{V_0}\right| < 0.005\,\% + 0.002\,\% = 0.007\,\%.$$

2.11 – Extrema locaux

Dans cette section:

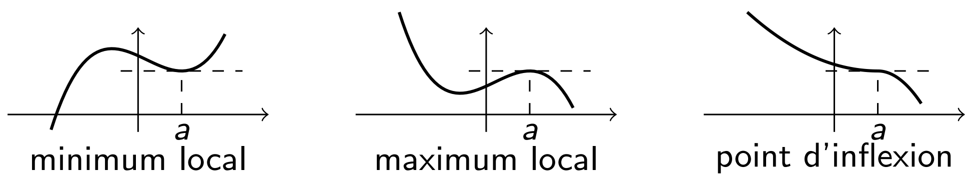
- Rappels sur les fonctions d'une variable
- Extrema locaux
- Points critiques et critère pour trouver les extrema locaux
- Points cols
- Points plats

Rappels sur les fonctions d'une variable

Rappel – Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a et non constante, la croissance ou décroissance de f en a est décelée par le signe de $f'(a)$ (positif ou négatif).

• Que se passe-t-il si $\quad f'(a) = 0 \quad$ (*point critique*) ?

Si $f'(a) = 0$, la tangente au graphe de f est horizontale, on est dans l'un des cas suivants:



Pour savoir lequel, on regarde la convexité (*minimum local*) ou la concavité (*maximum local*) donnée par le signe de $f''(a)$ (positif ou négatif).

• Que se passe-t-il si $\quad f''(a) = 0 \quad$ (*point plat*) ?

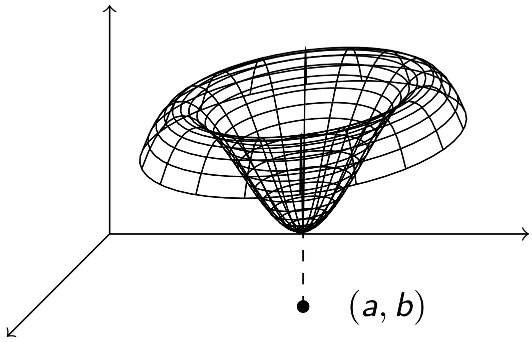
Si $f''(a) = 0$, on continue à dériver: si la première dérivée non nulle est d'ordre pair, on a un min ou un max local (selon le signe).
Si elle est d'ordre impair, on a un point d'inflexion.

Minima et maxima locaux

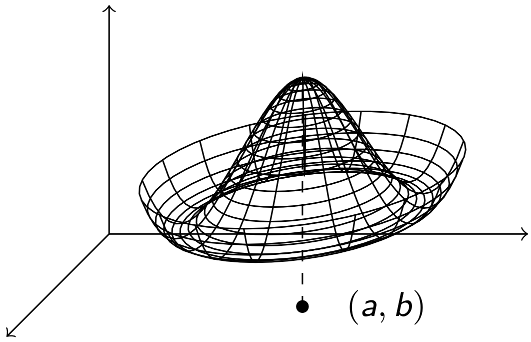
Définition – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'un point $(a, b) \in D_f$ est un **extremum local** de f s'il est

• soit un **minimum local**: $\boxed{f(a, b) < f(x, y)}$
pour tout (x, y) dans un voisinage de (a, b),

• soit un **maximum local**: $\boxed{f(a, b) > f(x, y)}$
pour tout (x, y) dans un voisinage de (a, b).



minimum local



maximum local

Points critiques et critère pour extrema locaux

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 au point (a, b).

Définition – (a, b) est un **point critique** de f si $\boxed{\vec{\nabla} f(a, b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Proposition – *Si (a, b) est un point critique de f, le plan tangent au graphe de f au point $\big(a, b, f(a, b)\big)$ est horizontal.*

Théorème – *Soit (a, b) un point critique de f.*
Si $\boxed{\det H_f(a, b) > 0}$ *alors (a, b) est un extremum local :*

• *si* $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0 \quad ou \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) > 0 \quad ou \quad \mathrm{tr}\, H_f(a, b) > 0}$
alors (a, b) est un minimum local,

• *si* $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0 \quad ou \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) < 0 \quad ou \quad \mathrm{tr}\, H_f(a, b) < 0}$
alors (a, b) est un maximum local.

Exemple de minimum local

Exemple – Montrons que la fonction

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

a exactement un minimum local en $(0,0)$.

- Cherchons d'abord les points critiques:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x,y) = (0,0)$$

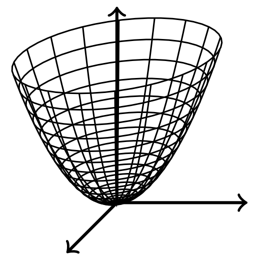
ainsi $(0,0)$ est le seul point critique de f.

- Cherchons sa nature:

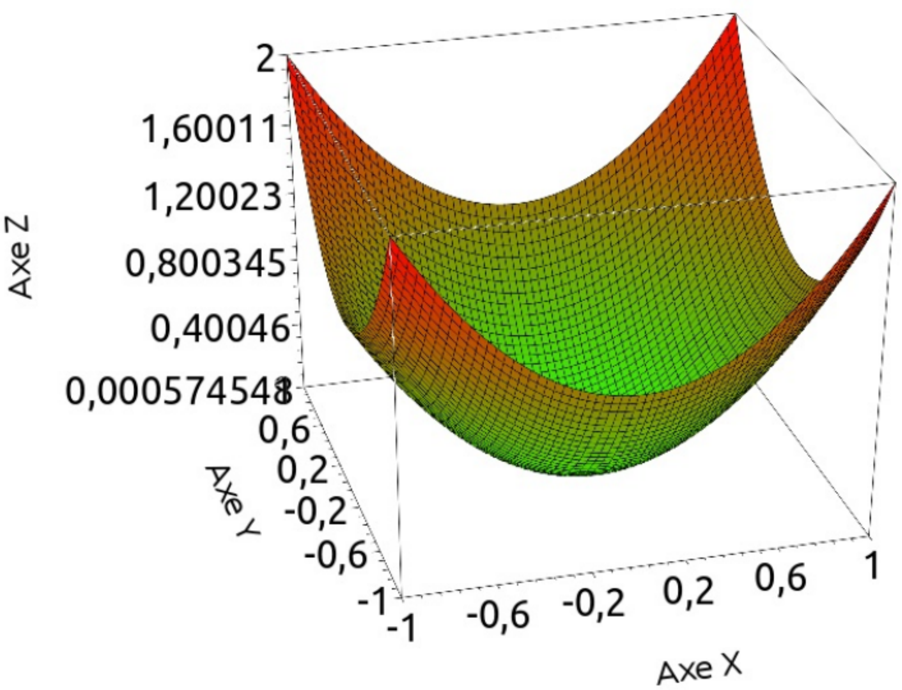
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \det H_f(0,0) = 4 > 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0 \end{cases}$$

ainsi $(0,0)$ est un minimum local.

- En effet, le graphe de f est:



Graphe de $f(x,y) = x^2 + y^2$

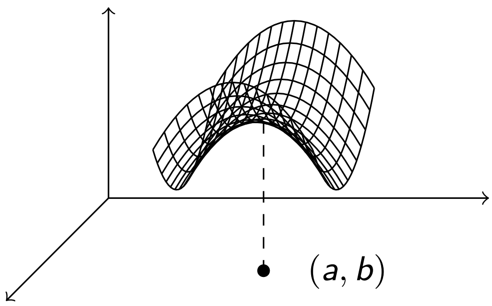


Graphe de $f(x,y) = x^2 + y^2$

Points selle

En un point critique, la fonction f a un plan tangent horizontale. Si le point n'est pas un extremum local, quelle est la forme de f ?

Définition – Soit (a, b) un point critique de la fonction f.
Si en (a, b) la fonction f a un <u>minimum dans une direction</u> et un <u>maximum dans une autre</u>, le point (a, b) s'appelle **point col** ou **point selle**:



Théorème – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 et soit (a, b) un point critique de f.
Si $\boxed{\det H_f(a, b) < 0}$ alors (a, b) est un point selle.

Exemple de point selle

Exemple – Montrons que la fonction

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

a exactement un point selle en $(0, 0)$.

- Cherchons d'abord les points critiques:

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = (0, 0)$$

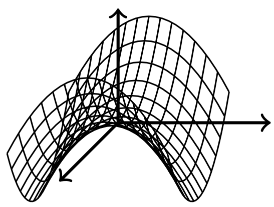
ainsi $(0, 0)$ est le seul point critique de f.

- Cherchons sa nature:

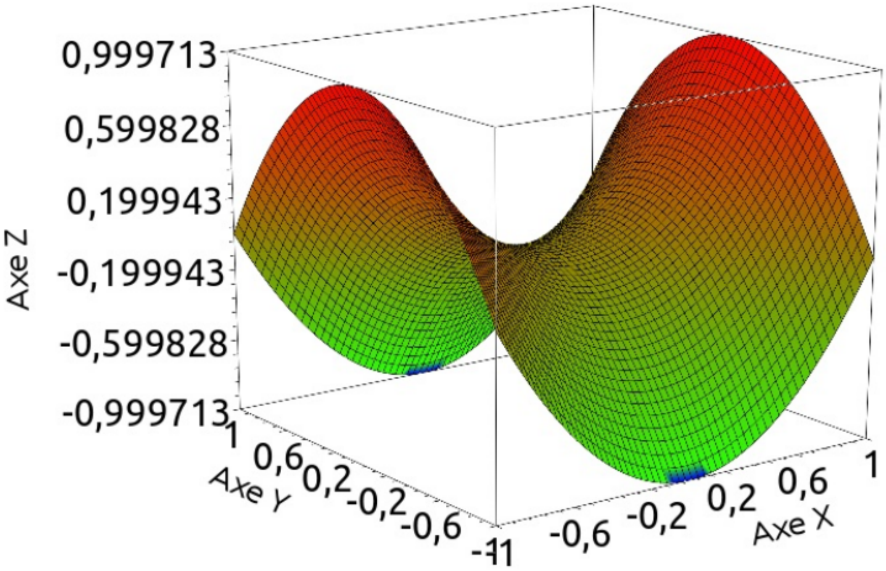
$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \det H_f(0, 0) = -4 < 0$$

ainsi $(0, 0)$ est un point col.

- En effet, le graphe de f est:



Graphe de $f(x,y) = x^2 - y^2$



Graphe de $f(x,y) = x^2 - y^2$

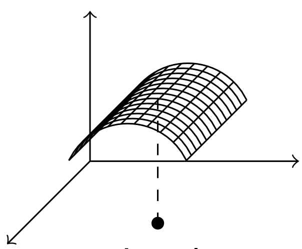
Points plats

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 et soit (a,b) un point critique de f. Par exclusion, on dit que (a,b) est un **point plat** si

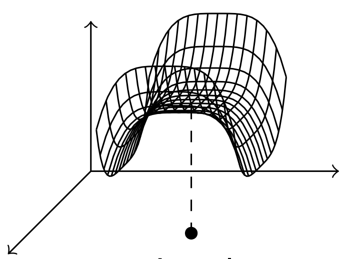
$$\boxed{\det H_f(a,b) = 0}$$

Un tel point se trouve au croisement de directions où f a

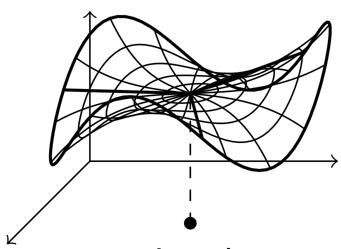
- soit au moins une direction plate (cylindre),
- soit un minimum et un maximum au même temps (selle),
- soit des inflexions (selle de singe).



point plat de type cylindre



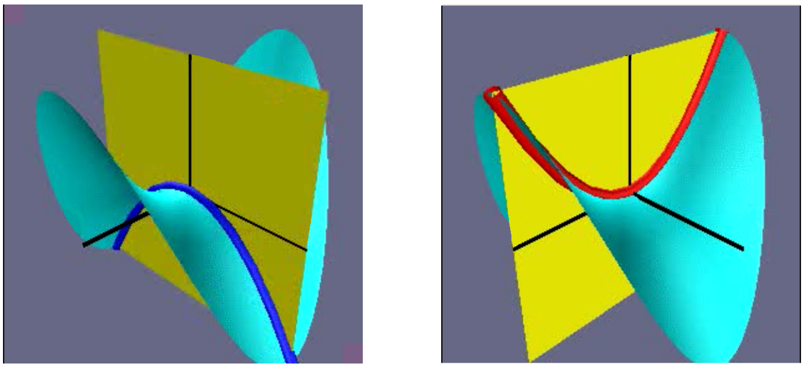
point plat de type selle



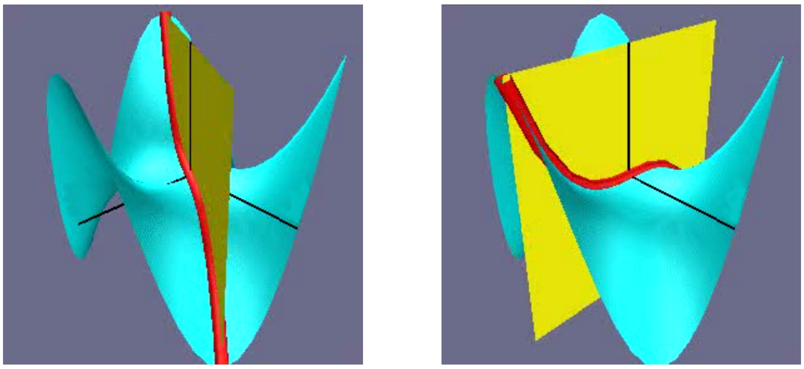
point plat de type selle de singe

On distingue ces types avec les dérivées d'ordre supérieur à 2.

Points col et points plat



Un point col non plat ($z = x^2 - y^2$) ou plat ($z = x^4 - y^4$)



Un point plat à selle de singe ($z = x^3 - 3xy^2$)

Exercice

Énoncé – *Déterminer les points critiques de la fonction*

$$f(x,y) = 4(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2$$

et, si possible, leur nature.

Réponse – Cherchons d'abord les points critiques:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x - 4x(x^2+y^2) \\ 8y - 4y(x^2+y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} x(2-x^2-y^2) = 0 \\ y(2-x^2-y^2) = 0 \end{cases} \iff \left\langle \begin{array}{l} \text{soit } (x,y) = (0,0) \\ \text{soit } x^2+y^2 = 2 \end{array} \right.$$

Par conséquent, f a

- un <u>cercle de points critiques</u> d'équation $x^2 + y^2 = 2$
- et un <u>point critique isolé</u> de coordonnées $(0,0)$.

Exercice (suite)

Cherchons la nature de ces points critiques:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8-12x^2-4y^2 & -8xy \\ -8xy & 8-12y^2-4x^2 \end{pmatrix}$$

• Pour le point $(0,0)$, on a

$$\det H_f(0,0) = \det \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 64 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 8 > 0$$

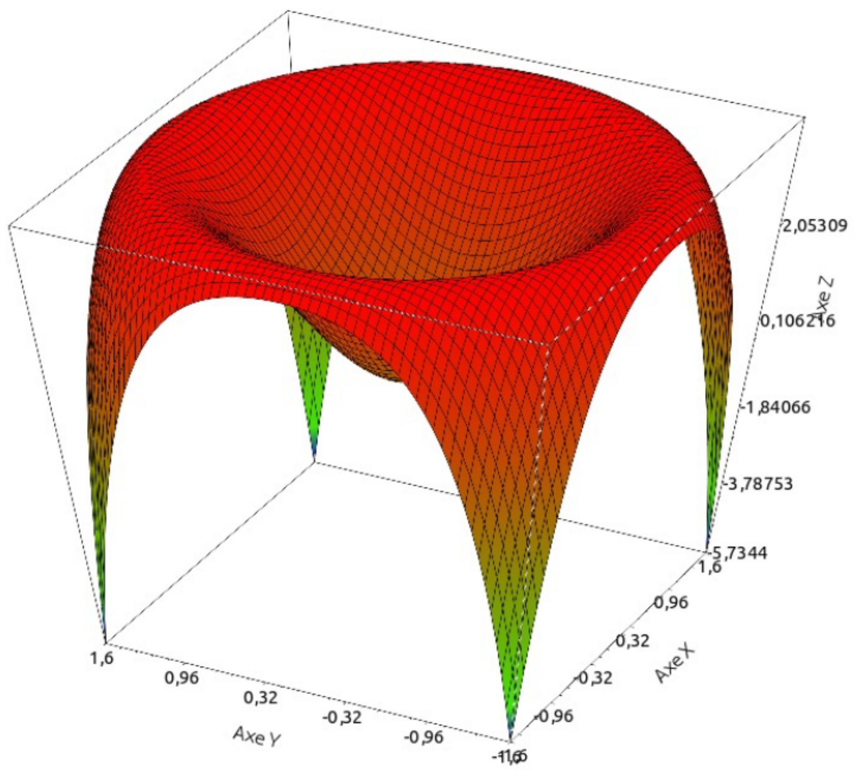
donc $(0,0)$ est un <u>minimum local</u>.

• Pour les points (x,y) tels que $x^2+y^2=2$, on a

$$\det H_f(x,y) = \det \begin{pmatrix} -8x^2 & -8xy \\ -8xy & -8y^2 \end{pmatrix} = 0$$

donc tous les points du cercle $x^2+y^2=2$ sont <u>plats</u>.

Graphe de $f(x,y) = 4(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2$



Graphe de $f(x,y) = 4(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2$

Chapitre 3
Intégrales multiples

3.1 – Intégrales de Riemann (rappels de TMB)

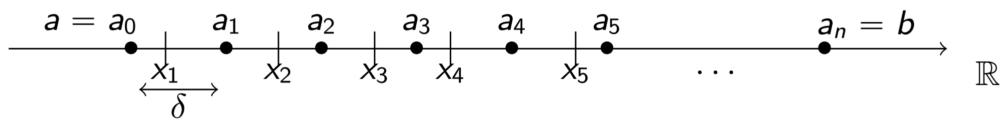
Dans cette section:

- Subdivisions, somme de Riemann et intégrale de Riemann d'une fonction d'une variable
- Aire sous le graphe d'une fonction
- Primitives et techniques d'intégration

Subdivision, somme et intégrale de Riemann

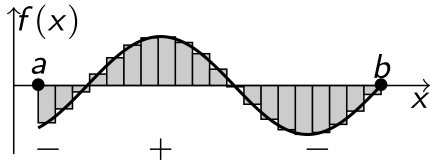
Rappels – Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable:

- **subdivision** de $[a,b]$: $\mathcal{S}_n = \{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b\}$



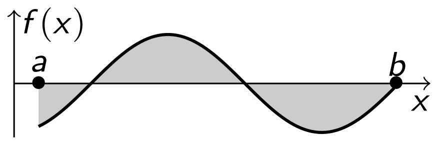
- **somme de Riemann de** f aux points $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$:

$$R_\delta(f; \{x_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\delta.$$



- **intégrale de Riemann de** f **sur** $[a,b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{tout } x_i}} R_\delta(f; \{x_i\})}$$

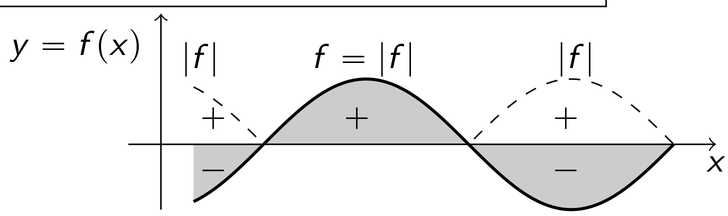


si la limite existe, est finie, et ne dépend pas des x_i.

L'intégrale donne l'aire sous le graphe

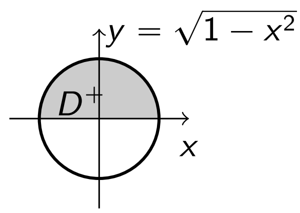
Rappels -

- $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \text{ aire ``algébrique'' sous le graphe de } f}$
- $\boxed{\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx = \text{ aire sous le graphe de } f}$ (positive)



Exemple: L'aire du disque

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$



se calcule comme une intégrale:

$$\mathrm{Aire}\,(D) = 2\,\mathrm{Aire}\,(D^+) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Primitives et techniques d'intégration

Pour connaitre l'intégral, il suffit de connaitre une primitive:

- Une **primitive de f sur** $[a,b]$ est une fonction F dérivable telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. On note $F(x) = \int f(x)dx$.
- **Théorème fondamental:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

- **Intégration par changement de variable:** $x = h(t)$

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(h(t)\big)\; h'(t)\,dt,$$

où h est un <u>difféomorphisme</u> (bijection dérivable avec réciproque h^{-1} dérivable).

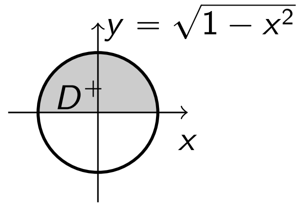
- **Intégration par parties:**

$$\int f(x)\; g'(x)\,dx = f(x)\; g(x) - \int f'(x)\; g(x)\,dx.$$

Problème – Pas d'analogue pour les fonctions de plusieurs variables!

Exemple: aire d'un disque

Aire d'un disque –



$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$$

$$\mathrm{Aire}\,(D) = 2\mathrm{Aire}\,(D^+) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\; dx$$

Calcul par changement de variable: $x = \sin t$ pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, car $\sqrt{1-x^2} = \cos t$. Alors $dx = \cos t\; dt$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{Aire}\,(D) &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\; dt \\ &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2t)+1}{2}\; dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\sin(2t) + t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \left(0 + \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{\pi}{2}\right) = \pi. \end{aligned}$$

3.2 – Intégrales doubles

Dans cette section:

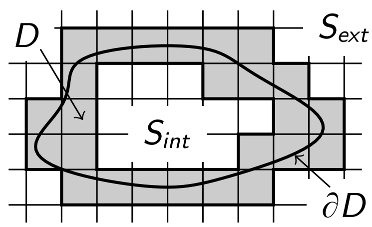
- Subdivisions des domaines du plan
- Sommes de Riemann des fonctions de deux variables
- Intégrale double
- Volume sous le graphe d'une fonction
- Théorème de Fubini
- Théorème du changement de variables

Subdivisions d'un domaine du plan

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné, avec bord ∂D lisse (au moins par morceaux).

Définition – Pour tout $\delta > 0$, on appelle **subdivision de** D l'ensemble $\mathcal{S}_\delta$ des carrés K_i de coté δ du plan qui couvrent D dans n'importe quel grillage de pas δ.
En particulier, on considère deux recouvrements:

- un **à l'extérieur** $\mathcal{S}_\delta^{ext}$,
- un **à l'intérieur** $\mathcal{S}_\delta^{int}$.



Puisque D est borné, les subdivisions contiennent un nombre fini de carrés, et on a $\mathcal{S}_\delta^{int} \subset \mathcal{S}_\delta^{ext}$.

Les carrés dans $\mathcal{S}_\delta^{ext} \backslash \mathcal{S}_\delta^{int}$ couvrent exactement le bord ∂D.

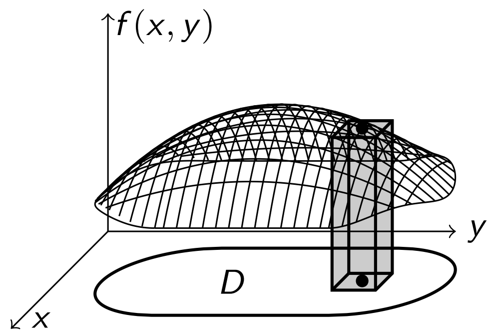
Sommes de Riemann d'une fonction de deux variables

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

Définition – Pour tout choix de points $(x_i, y_i) \in K_i \cap D$, on appelle **sommes de Riemann de** f associées aux subdivisions $\mathcal{S}_\delta^{ext/int}$ et aux points $\{(x_i, y_i)\}$ les sommes

$$R_\delta^{ext/int}(f, \{(x_i, y_i)\}) = \sum_{K_i \in \mathcal{S}_\delta^{ext/int}} f(x_i, y_i)\ \delta^2,$$

où chaque terme $f(x_i, y_i)\ \delta^2$ représente le **volume algébrique** ($= \pm$ volume) du parallélepipède de base K_i et hauteur $f(x_i, y_i)$.



Intégrale double

Théorème – *Si les limites* $\lim_{\delta \to 0} R_\delta^{ext/int}(f; \{(x_i, y_i)\})$ *existent et elles sont indépendantes du choix des points* $(x_i, y_i) \in K_i \cap D$*, alors elles coincident.*

Définition – Dans ce cas:
- on appelle **intégrale double de** f **sur** D cette limite:

$$\iint_D f(x, y)\ dx\ dy = \lim_{\delta \to 0} R_\delta^{ext/int}(f; \{(x_i, y_i)\}).$$

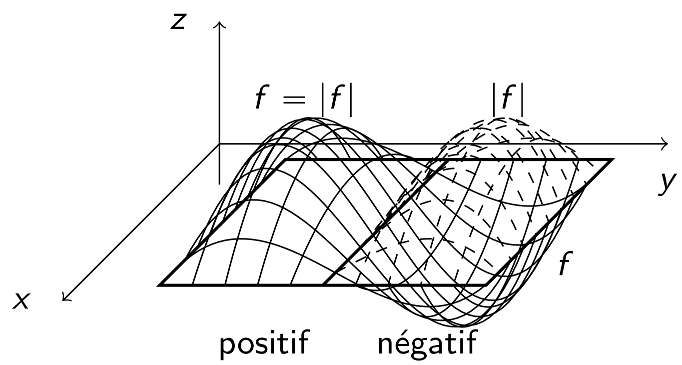
- on dit que f **est intégrable sur** D **selon Riemann** si l'intégrale $\iint_D f(x, y)\ dx\ dy$ est finie ($=$ nombre, pas $\pm\infty$).

Proposition – *Toute fonction* f *continue est intégrable selon Riemann sur un ensemble* D *borné à bord lisse (par morceaux).*

Signification géométrique de l'intégrale double

Corollaire –

- $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = $ *volume "algébrique" sous le graphe de* f.
- $\displaystyle\iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy = $ *volume sous le graphe de* f.



Exemple 1: volume d'une boule

Volume d'une boule – Le volume de la boule

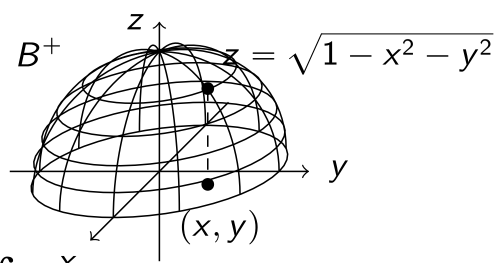
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$$

est deux fois le volume de la demi-boule

$$B^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ z \geqslant 0\},$$

qui se trouve sous le graphe de la fonction

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$



On a alors

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2 \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dx\,dy$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ est le disque unitaire.

Propriétés des intégrales doubles

Propriétés – 1) *Pour tout* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\iint_D (\lambda f + \mu g)\, dx\, dy = \lambda \iint_D f\, dx\, dy + \mu \iint_D g\, dx\, dy.$$

2) *Si* $D = D_1 \cup D_2$ *et* $D_1 \cap D_2 =$ *courbe ou point ou* $\varnothing$, *alors*

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x,y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} f(x,y)\, dx\, dy.$$

3) $$\left| \iint_D f(x,y)\, dx\, dy \right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\, dx\, dy.$$

4) *Si* $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ *pour tout* $(x,y) \in D$, *alors*

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy \leqslant \iint_D g(x,y)\, dx\, dy.$$

Théorème de Fubini sur un rectangle

Théorème de Fubini sur un rectangle – *Soit* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $D = [a,b] \times [c,d]$ *un rectangle. Alors on a*

$$\boxed{\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\, dx\, dy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy \end{aligned}}$$

Notation – $\displaystyle \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right) dx$

Corollaire – $\displaystyle \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_1(x)\, f_2(y)\, dx\, dy = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy$

Exemple 2: calcul d'intégrales doubles

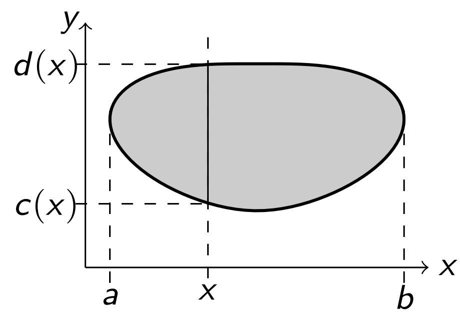
Exemples –

- $$\iint\limits_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x\cos y\,dx\,dy = \int_0^1 x\,dx \int_0^{\pi/2} \cos y\,dy = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \left[\sin y\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$
- $$\iint\limits_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2y-1)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (x^2y-1)\,dy = \int_{-1}^1 dx \left[\frac{1}{2}x^2y^2 - y\right]_{y=0}^{y=1} = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)\,dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - x\right]_{-1}^1 = -\frac{5}{3}$$

Théorème de Fubini

Lemme – *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné quelconque.*

- *Pour tout $(x,y) \in D$ il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$.*
- *Pour tout $x \in [a,b]$ il existe $c(x), d(x) \in \mathbb{R}$ tels que $c(x) \leqslant y \leqslant d(x)$.*



Au final:

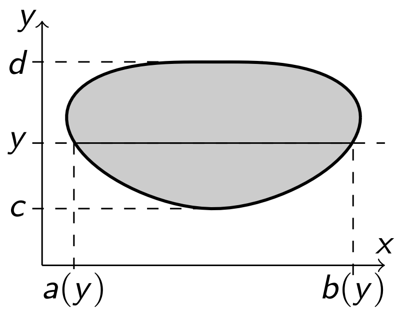
$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y \in [c(x), d(x)] \right\}$$

Théorème de Fubini sur D – *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors*

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right)\,dx}$$

Théorème de Fubini (suite)

Alternative –



L'ensemble D est décrit par

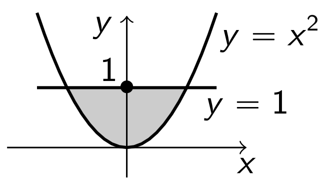
$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d],\ x \in [a(y), b(y)] \}$$

Théorème de Fubini sur D –

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right) dy}$$

Exemple 3: calcul d'intégrale double

Exemple – Soit D la partie du plan xOy délimitée par l'arc de parabole $y = x^2$ en bas, et la droite $y = 1$ en haut.



On peut décrire D comme

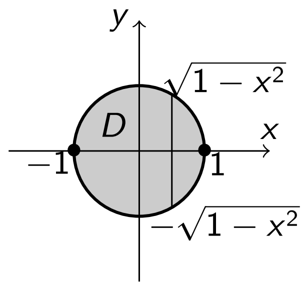
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ y \in [x^2, 1]\}.$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned}
\iint_D x^2 y \ dx \ dy &= \int_{-1}^1 x^2 \ dx \ \int_{x^2}^1 y \ dy \\
&= \int_{-1}^1 x^2 \ \left[\frac{1}{2} y^2\right]_{x^2}^1 \ dx \\
&= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(x^2 - x^6) \ dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7}x^7\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{4}{21}
\end{aligned}$$

Exemple 4: volume de la boule

Exemple – Rappelons que le volume de la boule unitaire est



$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2 \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

On peut décrire D comme l'ensemble

$$D = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ y \in \big[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\big] \Big\}.$$

- Voici donc le calcul du volume de la boule:

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}\,(B) &= 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy \\ &= 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}}\,dy. \end{aligned}$$

- On pose $\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \sin t$ pour avoir $\sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}} = |\cos t|$.

Exemple 4: volume de la boule (suite)

- $y = \sqrt{1-x^2}\,\sin t \qquad dy = \sqrt{1-x^2}\,\cos t\,dt$
- $-\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2} \quad \Rightarrow \quad -1 \leqslant \sin t \leqslant 1$

  $\Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $\sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}} = \cos t$

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}\,(B) &= 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}}\,dy \\ &= 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-x^2}\,\cos t\,\sqrt{1-x^2}\,\cos t\,dt \\ &= 2\int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt \end{aligned}$$

- puisque $2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \pi$ (voir ex. précédent)

$$\mathrm{Vol}\,(B) = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = \pi\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{4\pi}{3}.$$

Changement de variables

Définition – Un **changement de variables**

$$(x,y) = h(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$$

est un <u>difféomorphisme</u> $h : \tilde{D} \to D : (u,v) \mapsto h(u,v) = (x,y)$, c'est-à-dire une bijection de classe C^1 avec réciproque $h^{-1} : D \to \tilde{D} : (x,y) \mapsto h^{-1}(x,y) = (u,v)$ de classe C^1.

Théorème – *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction des variables (x,y) et $(x,y) = h(u,v)$ un changement de variables. Alors*

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(u,v) \left|\det J_h(u,v)\right| du\, dv}$$

où $\tilde{f}(u,v) = f(h(u,v))$, $\tilde{D} = \big\{(u,v) \mid h(u,v) \in D\big\}$
et $\det J_h(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$ *est le Jacobien de h.*

Passage en polaire – $\boxed{dx\, dy = \rho\, d\rho\, d\varphi}$

Exemple 5: volume d'une boule en polaires

Volume de la boule en coordonnées polaires – On calcul

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2 \iint_{D=\{x^2+y^2 \leqslant 1\}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

en coordonnées polaires $(x,y) = h(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$.

- Puisque $x^2+y^2 = \rho^2$, on a :

$$\tilde{D} = \big\{(\rho,\varphi) \in [0,\infty[\times[0,2\pi[\;\big|\; \rho \leqslant 1\big\} = [0,1]\times[0,2\pi[$$

- on utilise $dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\varphi$, $\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-\rho^2}$ et Fubini:

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\; \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\; \rho\, d\rho$$

- enfin, on pose $t = 1-\rho^2$ donc $dt = -2\rho\, d\rho$:

$$\mathrm{Vol}\,(B) = -\frac{4\pi}{2}\int_1^0 t^{1/2}\, dt = 2\pi\int_0^1 t^{1/2}\, dt = 2\pi\frac{2}{3}\Big[t^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

3.3 – Intégrales triples

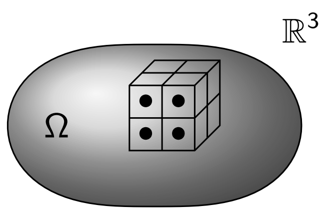
Dans cette section:

- Subdivisions des solides
- Sommes de Riemann des fonctions de trois variables
- Intégrales triples
- Théorème de Fubini
- Théorème du changement de variables

Intégrale triple

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble borné avec bord $\partial\Omega$ lisse (par morceaux), et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de trois variables.

Définition –
• On choisit une **subdivision** $\mathcal{S}_\delta$ de Ω en petits cubes K_i de taille δ^3, avec δ qui tend vers zéro.



• On définit l'**intégrale triple de** f **sur** Ω comme la limite (quand elle existe) de la **somme de Riemann** associée à $\mathcal{S}_\delta$ et à des points $(x_i, y_i, z_i) \in K_i \cap \Omega$ quelconque:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \lim_{\delta \to 0} \sum_{K_i \in \mathcal{S}_\delta} f(x_i, y_i, z_i)\, \delta^3.$$

• On dit que f est **intégrable** si son intégrale est finie.

Proposition – *Toute fonction f continue est intégrable selon Riemann sur un ensemble Ω borné à bord lisse (par morceaux).*

Signification géométrique et propriétés

Signification géométrique – *Le graphe de f est une* *hyper-surface de* $\mathbb{R}^4$ (difficile à dessiner)*:*

- $\displaystyle\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \underline{\text{quadri-volume}}$ *"algébrique" sous le graphe de f.*
- $\displaystyle\iiint_\Omega |f(x,y,z)|\,dx\,dy\,dz = \underline{\text{quadri-volume}}$ *sous le graphe de f.*

Propriétés – 1) *Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a*

$$\iiint_\Omega (\lambda f + \mu g)\,dx\,dy\,dz = \lambda \iiint_\Omega f\,dx\,dy\,dz + \mu \iiint_\Omega g\,dx\,dy\,dz.$$

2) *Si $\Omega_1 \cap \Omega_2 =$ surface ou courbe ou point ou $\emptyset$, alors*

$$\iiint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega_1} f\,dx\,dy\,dz + \iiint_{\Omega_2} f\,dx\,dy\,dz.$$

etc

Théorème de Fubini

Théorème de Fubini – *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.*

- *Si Ω est un parallélépipède, alors*

$$\Omega = [a,b] \times [c,d] \times [e,g]$$

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g dz\ f(x,y,z)}$$

(on intègre dans l'ordre qu'on veut)

- *Si Ω est un ensemble borné quelconque, alors:*

$$\Omega = \{(x,y,z) \,|\, x \in [a,b],\ y \in [c(x), d(x)],\ z \in [e(x,y), g(x,y)]\}$$

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \int_{e(x,y)}^{g(x,y)} dz\ f(x,y,z)}$$

(l'ordre d'intégration est forcé)

Exemple 1: calcul d'intégrales triples

Exemple – $\Omega = [0,1]\times[1,2]\times[2,3] \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega (x^2 - 2yz)\, dx\, dy\, dz \quad &= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \int_0^1 dx\ (x^2 - 2yz) \\
&= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \left[\frac{1}{3}x^3 - 2xyz \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \left(\frac{1}{3} - 2yz \right) \quad = \int_2^3 \left[\frac{1}{3}y - y^2 z \right]_{y=1}^{y=2} dz \\
&= \int_2^3 \left(\frac{2}{3} - 4z - \frac{1}{3} + z \right) dz \quad = \int_2^3 \left(\frac{1}{3} - 3z \right) dz \\
&= \left[\frac{1}{3}z - \frac{3}{2}z^2 \right]_2^3 \quad = \frac{3}{3} - \frac{27}{2} - \frac{2}{3} + \frac{12}{2} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{15}{2} \quad = -\frac{43}{6}
\end{aligned}$$

Exemple 2: calcul d'intégrales triples

Exemple – On veut calculer $\displaystyle\iiint_\Omega (1 - 2yz)\, dx\, dy\, dz$

où Ω est le cylindre plein de hauteur 3 et de base le disque

$$D = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = 0 \Big\}.$$

- D'abord, on décrit explicitement Ω :

$$\begin{aligned}
\Omega \quad &= \Big\{ (x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 3 \Big\} \\
&= \Big\{ (x,y,z) \mid x \in [-1,1],\ y \in \big[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2} \big],\ z \in [0,3] \Big\}
\end{aligned}$$

- Ensuite on applique Fubini:

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega (1 - 2yz)\, dx\, dy\, dz \quad &= \int_0^3 dz \iint_D (1 - 2yz)\, dx\, dy \\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\ (1 - 2yz)
\end{aligned}$$

Exemples 2 (suite)

Exemple (suite) –

$$\iiint_\Omega (1-2yz)\,dx\,dy\,dz = \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-2yz)\,dy$$

$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \Big[y - y^2 z\Big]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \Big(\sqrt{1-x^2} - (1-x^2)z + \sqrt{1-x^2} + (1-x^2)z\Big)\,dx$$

$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t\ dt$$

$$= 3\pi$$

Changement de variables

Définition – Un **changement de variables**

$$\vec{x} = (x,y,z) = h(u,v,w) = \big(x(\vec{u}), y(\vec{u}), z(\vec{u})\big)$$

est un <u>difféomorphisme</u> $\quad h : \tilde{\Omega} \to \Omega : \vec{u} \mapsto h(\vec{u}) = \vec{x}$
(bijection C^1 avec réciproque $h^{-1}(\vec{x}) = \vec{u}$ aussi C^1).

Théorème – *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de $\vec{x}$ et $\vec{x} = h(\vec{u})$ un changement de variables. Alors*

$$\boxed{\iiint_\Omega f(\vec{x})\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\tilde{\Omega}} f\big(h(\vec{u})\big)\ \Big|\det J_h(\vec{u})\Big|\,du\,dv\,dw}$$

où $\quad \tilde{\Omega} = \big\{\vec{u} \mid h(\vec{u}) \in \Omega\big\}$ *et* $\quad \det J_h(\vec{u}) \quad$ *est le Jacobien de h.*

Passage en coordonnées cylindriques et sphériques –

$$\boxed{dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = r^2\,\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta}$$

Exemple 3: intégrale par changement de variables

Exemple – Considérons à nouveau $\displaystyle\iiint_\Omega (1-2yz)\,dx\,dy\,dz$

où Ω est le cylindre de hauteur 3 et de base le disque D.

- En coordonnées cylindriques, on a

$$\Omega = \Big\{\,(\rho,\varphi,z)\mid \rho\in\,]0,1],\ \varphi\in[0,2\pi[,\ z\in[0,3]\,\Big\}$$

- Puisque $dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$, on a

$$\iiint_\Omega (1-2yz)\,dx\,dy\,dz = \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} (1-2\rho\sin\varphi z)\ d\varphi$$
$$= \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\,d\rho\,\Big[\,\varphi + 2\rho\cos\varphi z\,\Big]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}$$
$$= \int_0^3 dz \int_0^1 \Big(2\pi + 2\rho z - 2\rho z\Big)\ \rho\,d\rho$$
$$= \int_0^3 dz \int_0^1 2\pi\ \rho\,d\rho \quad = 3\ \pi\,\Big[\,\rho^2\,\Big]_0^1 \quad = 3\pi$$

3.4 – Aire, volume, moyenne, centre de masse

Dans cette section:

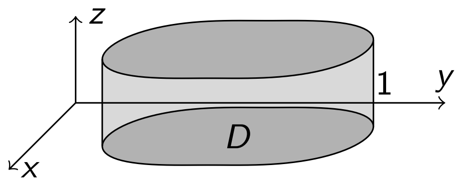
- Aire d'un domaine du plan
- Volume d'un solide
- Quantités totale et moyenne
- Centre de masse et moment d'inértie

Motivation pour la définition générale d'aire

Remarque – Si D est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, l'intégrale

$$\iint_D dx\ dy$$

représente le volume sous le graphe de la fonction $f(x,y) = 1$.



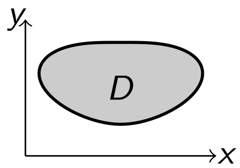
Ce solide Ω est un cylindre de hauteur $H = 1$ et de base D:

$$\iint_D dx\ dy = \mathrm{Vol}\,(\Omega) = \mathrm{Aire}\,(D) \times H = \mathrm{Aire}\,(D).$$

Aire d'un domaine du plan

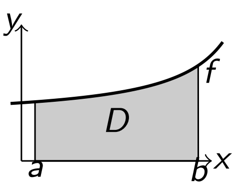
Définition – L'**aire** d'un domaine D borné de $\mathbb{R}^2$ est

$$\boxed{\mathrm{Aire}\,(D) = \iint_D dx\, dy}$$



Proposition – *Si D est la portion du plan sous le graphe d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ positive, c'est-à-dire si*

$$D = \big\{(x,y) \mid x \in [a,b],\ y \in [0, f(x)]\big\},$$



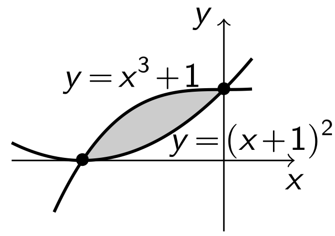
alors: $$\boxed{\mathrm{Aire}\,(D) = \int_a^b f(x)\, dx}$$

- En effet: $$\iint_D dx\, dy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Exercice: aire d'un domaine du plan

Énoncé – Calculer l'aire du domaine borné $D \subset \mathbb{R}^2$ délimité par les courbes d'équation $y = x^2 + 2x + 1$ et $y = x^3 + 1$.

Réponse – D'abord on dessine D et on trouve les deux points d'intersection des courbes: $(-1,0)$ et $(0,1)$.



On a donc

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 0,\ x^2 + 2x + 1 \leqslant y \leqslant x^3 + 1\right\}.$$

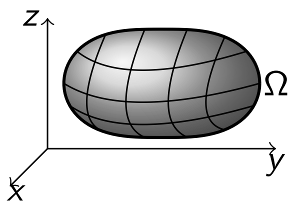
Ensuite on applique Fubini:

$$\begin{aligned} \mathrm{Aire}\,(D) &= \iint_D dx\,dy = \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} dy \\ &= \int_{-1}^{0} \left(x^3+1-x^2-2x-1\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

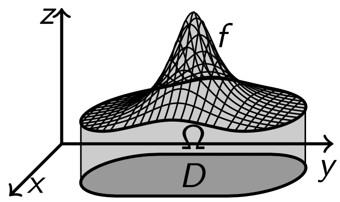
Volume d'un solide

Définition – Le **volume** d'un solide Ω borné de $\mathbb{R}^3$ est

$$\boxed{\mathrm{Vol}\,(\Omega) = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz}$$



Proposition – *Si Ω est l'espace sous le graphe d'une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire si*



$$\Omega = \left\{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ z \in [0, f(x,y)]\right\},$$

alors:
$$\boxed{\mathrm{Vol}\,(\Omega) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy}$$

- Car $\displaystyle\iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_0^{f(x,y)} dz = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$

Exemple 1: volume d'une boule en sphériques

Volume de la boule en coordonnées sphériques – En coordonnées sphériques, la boule unité B s'écrit

$$B = \big\{(r,\varphi,\theta) \mid r \in [0,1],\ \varphi \in [0,2\pi[,\ \theta \in [0,\pi]\big\}.$$

Puisque $dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\,(B) &= \iiint_B dx\,dy\,dz \\
&= \iiint_{[0,1]\times[0,2\pi[\times[0,\pi]} r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta \\
&= \int_0^1 r^2\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{3}\, 2\pi \Big[-\cos\theta \Big]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{3}\,(1+1) = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Quantités totale et moyenne

Définition – En physique, si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ représente une *concentration* de matière (une *densité volumique*), ou une *densité* de courant ou d'énergie, alors on appelle

• **quantité totale** de matière / courant / énergie en Ω le nombre

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

• **quantité moyenne** de matière / courant / énergie en Ω le nombre

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}\,(\Omega)} \iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

Exemple 2: moyenne

Exemple – Un matériau est réparti dans un cube $\Omega = [0, R]^3$ selon la densité volumique $f(x, y, z) = \frac{x+y}{(z+1)^2}$.

- La quantité totale du matériau est alors

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^R dx \int_0^R (x+y)\,dy \int_0^R \frac{1}{(z+1)^2}dz \\ &= \int_0^R \Big[xy + \frac{1}{2}y^2\Big]_{y=0}^{y=R} dx \,\Big[-\frac{1}{z+1}\Big]_0^R \\ &= \int_0^R \Big(Rx + \frac{1}{2}R^2\Big)\,dx \,\Big(1 - \frac{1}{R+1}\Big) \\ &= \Big[\frac{1}{2}Rx^2 + \frac{1}{2}R^2 x\Big]_0^R \frac{R}{R+1} = \frac{R^4}{R+1}.\end{aligned}$$

- Puisque $\mathrm{Vol}(\Omega) = R^3$, la quantité moyenne est

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega)} \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{R^3}\,\frac{R^4}{R+1} = \frac{R}{R+1}.$$

Barycentre

Définition – Si $\mu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ denote la *densité de masse* d'un matériau contenu dans Ω, on appelle

- **masse totale** le nombre $M = \iiint\limits_{D} \mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

La masse (*inertielle*) M d'un solide soumis à une force quantifie sa résistence à une *accéleration linéaire*.

- **centre de masse** (ou **centre d'inertie**, ou **barycentre**) le point G de coordonnées

$$x_G = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} x\,\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$
$$y_G = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} y\,\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$
$$z_G = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} z\,\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Le centre de masse d'un solide sousmis à une force est le point qui se déplace comme comme si le solide y était concentré.

Moment d'inertie

Définition (suite) – Si $r(x, y, z)$ est la distance d'un point (x, y, z) à un point fixé P ou à une droite Δ:

- le **moment d'inertie** par rapport à P ou à Δ est le nombre

$$\frac{1}{M} \iiint_{\Omega} r^2(x, y, z)\, \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Le moment d'inertie d'un solide sousmis à une force quantifie sa résistence à la rotation autour de P ou Δ (à une *accéleration angulaire*).

Nota – Un matériau est dit **homogène** si sa densité de masse μ est constante. Dans ce cas, sa masse dedans Ω est donnée par l'intégrale

$$M = \mu \iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz = \mu\, \mathrm{Vol}\,(\Omega),$$

et les formules du centre de masse et du moment d'inértie se modifient en conséquence.

Exemple 3: centre de masse

Exemple – On cherche à déterminer le centre de masse du demi-cylindre homogène ($\mu = 1$)

$$\Omega = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ z \in [0, H],\ y \geqslant 0\big\}.$$

- Il est naturel de travailler en coordonnées cylindriques et d'écrire le demi-cylindre comme

$$\tilde{\Omega} = \big\{(\rho, \varphi, z) \mid \rho \in [0, R],\ \varphi \in [0, \pi],\ z \in [0, H]\big\}.$$

- Le calcul de la masse totale donne

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz \quad = \iiint_{\tilde{\Omega}} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \\ &= \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^H dz \quad = \frac{\pi\, R^2 H}{2}. \end{aligned}$$

Exemple 3 (suite)

- Le centre de masse G a pour coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M}\iiint\limits_{\tilde{\Omega}} (\rho\cos\varphi)\;\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \frac{1}{M}\int_0^R \rho^2\,d\rho \int_0^\pi \cos\varphi\,d\varphi \;\int_0^H dz = 0 \\
y_G &= \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} y\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M}\int_0^R \rho^2\,d\rho \;\int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi \;\int_0^H dz = \frac{2}{\pi\,R^2 H}\,\frac{R^3}{3}\;2\;H = \frac{4R}{3\pi} \\
z_G &= \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M}\int_0^R \rho\,d\rho \;\int_0^\pi d\varphi \;\int_0^H z\,dz = \frac{2}{\pi\;R^2 H}\,\frac{R^2}{2}\;\pi\;\frac{H^2}{2} = \frac{H}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi $G = \left(0, \frac{4R}{3\pi}, \frac{H}{2}\right)$.

Exercice 1: quantité totale et moyenne

Énoncé – *De la farine s'éparpille au sol selon la densité*

$$f(x,y) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)^2}, \quad \textit{où } (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Trouver la quantité totale et moyenne de farine éparpillée sur un disque D de rayon $R>0$ centré en l'origine.

Réponse – En coord. polaires, on a $f(\rho,\varphi) = \dfrac{1}{(\rho+1)^2}$ et $D = \{\,(\rho,\varphi)\mid \rho\in[0,R],\ \varphi\in[0,2\pi[\,\}$. Ainsi:

$$\begin{aligned}
\text{Quantité totale} &= \iint\limits_D \frac{1}{(\rho+1)^2}\;\rho\,d\rho\,d\varphi \\
&= \int_0^R \left(\frac{\rho+1}{(\rho+1)^2} - \frac{1}{(\rho+1)^2}\right)\,d\rho \;\int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= 2\pi\int_0^R \left(\frac{1}{\rho+1} - \frac{1}{(\rho+1)^2}\right)\,d\rho \\
&= 2\pi\Big[\,\ln(\rho+1) + \frac{1}{\rho+1}\,\Big]_0^R = 2\pi\,\left(\,\ln(R+1) - \frac{R}{R+1}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 1 (suite)

Au final:

$$\text{Quantité totale} = 2\pi \left(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \right).$$

Puisque

$$\mathrm{Aire}\,(D) = \iint_D \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^2}{2}\, 2\pi = \pi R^2,$$

on a

$$\begin{aligned} \text{Quantité moyenne} &= \frac{1}{\mathrm{Aire}\,(D)} \iint_D \frac{1}{(\rho+1)^2}\, \rho\, d\rho\, d\varphi \\ &= \frac{2}{R^2} \left(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \right). \end{aligned}$$

Exercice 2: centre de masse

Exercice – *Calculer le centre de masse du solide Ω composé de la demi-boule B et du cylindre C suivants:*

$$\begin{aligned} B &= \Big\{ (r,\varphi,\theta) \;\Big|\; r \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi],\ \theta \in [\pi/2,\pi] \Big\} \\ C &= \Big\{ (\rho,\varphi,z) \;\Big|\; \rho \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi],\ z \in [0,R] \Big\}, \end{aligned}$$

et avec la densité de masse $\mu(x,y,z) = z^2$.

Réponse – Puisque $\Omega = B \cup C$, et $B \cap C =$ courbe, le centre de masse G a coordonnées

$$x_G = \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega x\, \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \quad (\text{idem pour } y_G \text{ et } z_G),$$

où $\quad M_\Omega = M_B + M_C \quad$ et $\quad \displaystyle\iiint_\Omega = \iiint_B + \iiint_C.$

• Les intégrales se calculent:
en coordonnées sphériques sur B, où $\mu(r,\varphi,\theta) = r^2 \cos^2\theta$,
en coordonnées cylindriques sur C, où $\mu(\rho,\varphi,z) = z^2$.

Exercice 2 (suite)

- Calcul de la masse de Ω:

$$\begin{aligned}
M_B &= \iiint_B r^2 \cos^2\theta \; r^2 \sin\theta \; dr\, d\varphi\, d\theta \\
&= \int_0^R r^4\, dr \; \int_0^{2\pi} d\varphi \; \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{R^5}{5} 2\pi \Big[-\frac{1}{3}\cos^3\theta \Big]_{\pi/2}^{\pi} \qquad = \frac{2\pi R^5}{15} \\
M_C &= \iiint_C z^2\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \\
&= \int_0^R \rho\, d\rho \; \int_0^{2\pi} d\varphi \; \int_0^R z^2\, dz \qquad = \frac{R^2}{2}\; 2\pi\; \frac{R^3}{3} \qquad = \frac{\pi R^5}{3}
\end{aligned}$$

Au final: $\quad M_\Omega = M_B + M_C = \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{3}\right) \pi R^5 = \frac{7\pi R^5}{15}.$

Exercice 2 (suite)

- Puisque $\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0$ et $\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 0$, on a:

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega x\, \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\
&= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5\, dr \; \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \; \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta\, d\theta \\
&\quad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho^2\, d\rho \; \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \; \int_0^R z^2\, dz \qquad = 0 \\
y_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega y\, \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\
&= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5\, dr \; \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi \; \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta\, d\theta \\
&\quad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho^2\, d\rho \; \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi \; \int_0^R z^2\, dz \qquad = 0
\end{aligned}$$

Exercice 2 (suite)

Enfin:

$$\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint\limits_\Omega z\,\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3\theta \sin\theta\,d\theta \\
&\qquad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R z^3\,dz \\
&= \frac{15}{7\pi R^3} \left(\frac{R^6}{6}\,2\pi \left[-\frac{1}{4}\cos^4\theta \right]_{\pi/2}^{\pi} + \frac{R^2}{2}\,2\pi\,\frac{R^4}{4} \right) \\
&= \frac{15\pi R^6}{7\pi R^3} \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{15R^3}{7}\,\frac{2}{12} \\
&= \frac{5R^3}{14}.
\end{aligned}$$

Exercice 2 (suite)

- En conclusion, le barycentre G de Ω a pour coordonnées

$$G = (0, 0, 5R^3/14)$$

Puisque $5R^3/14 > 0$, il se trouve dans la partie cylindrique.

- Le barycentre se trouve à l'intérieur de Ω si

$$5R^3/14 \leqslant R$$

c'est-à-dire si $R \leqslant \sqrt{14/5}$.

Chapitre 4
Champs scalaires et champs de vecteurs

4.1 – Champs et fonctions

Dans cette section:

- Repères et referentiels
- Dépendance des repères
- Loi de transformation d'un champ
- Dessin d'un champ

Repères et referentiels

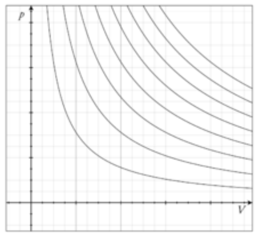
En physique, le **referentiel** est l'ensemble des *grandeurs* et de leurs *unité de mesure*. En mathématiques, le referentiel est représenté par un **repère** $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de $\mathbb{R}^n$, où:

- la **direction** des vecteurs $\vec{e}_i$ represente les grandeurs,
- la **longueur** des vecteurs $\vec{e}_i$ represente l'unité de mesure,
- l'**origine** O donne la valeur zéro des grandeurs.

Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, les **coordonnées** $(x_1, \dots, x_n)$ telles que $\vec{x} = \sum x_i \, \vec{e}_i$ représentent les *mesures* des grandeurs $\vec{e}_i$.

Exemple – Dans un gaz parfait, la loi $PV = nRT$ décrit la relation entre la *pression* P, le *volume* V et la *temperature* T.

Les *isothermes* (courbes à temperature constante), sont dessinées dans l'espace $\mathbb{R}^2$ où l'on fixe le repère $(O, \vec{e}_V, \vec{e}_P)$ pour représenter le referentiel (V, P).



Lois dépendantes du changement de repère

Idée – Une *fonction* et un *champ* sont des lois qui associent à $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ une valeur $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$. La différence entre fonctions et champs est dans la *dépendance des repères* sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$:
les fonctions sont indépendantes des changement de repères,
les champs en dépendent.

Exemple – On veut se ranger en file indienne devant la porte:
x = grandeur qui décrit chaque personne de cette salle
$P(x) = \dfrac{x}{10}$ = position dans la file à partir de la porte

Si on change l'unité de mesure de x, la position dans la file ne change pas, mais comment se transforme-t-elle la loi $P(x)$ qui représente cette position?

On donne deux exemples: une loi qui ne dépend pas du changement de referentiel, et une qui en dépend.

Loi de transformation des fonctions

- **Loi basée sur l'age –**
  $x =$ age en années et $P(x) = \dfrac{x}{10}$ en mètres.

Si $u =$ age en mois, la même position est donnée par $\tilde{P}(u) = \dfrac{u}{120}$.
Par exemple, vu que $u = 12\,x$, on a:

$$P(10) = \frac{10}{10} = 1 \quad \text{et} \quad \tilde{P}(120) = \frac{120}{120} = 1.$$

Quelle est la relation entre $\tilde{P}(u)$ et $P(x)$?

Le changement de variable est $x = h(u) = \dfrac{u}{12}$, et on a

$$P(x) = P\big(h(u)\big) = P\Big(\frac{u}{12}\Big) = \frac{u}{120} = \tilde{P}(u)$$

c'est-à-dire $\boxed{\tilde{P} = P \circ h}$.

C'est la loi de transformation des fonctions par changement de coordonnées.

Loi de transformation des champs

- **Loi basée sur la distance –**

$x =$ distance du tableau en mètres, alors $P(x) = \dfrac{x}{10}$ est en mètres.

Si $u =$ distance en centimètres, la position dans la file ne change pas, mais elle est exprimée en centimètres et on a $\tilde{P}(u) = \dfrac{u}{10}$.
Par exemple, vu que $u = 100\,x$, on a:

$$P(10) = \frac{10}{10} = 1m \quad \text{et} \quad \tilde{P}(1000) = \frac{1000}{10} = 100cm \ (= 1m).$$

Quelle est donc, cette fois, la relation entre $P(x)$ et $\tilde{P}(u)$?

Le changement de variable est $x = h(u) = \dfrac{u}{100}$, et on a

$$P(x) = P\big(h(u)\big) = P\Big(\frac{u}{100}\Big) = \frac{u}{1000} = \frac{\tilde{P}(u)}{100} \quad \text{donc } \tilde{P} \neq P \circ h!$$

La bonne loi de transformation est $\boxed{\tilde{P} = H \circ P \circ h}$, où

$$h(u) = \frac{u}{100} \quad \text{et} \quad H(z) = 100\,z = h^{-1}(z).$$

Champs de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

Definition – Un **champ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$** est une loi

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \ \vec{x} \mapsto F(\vec{x})$$

qui se transforme, par changement de coordonnées $\vec{x} = h(\vec{u})$, comme

$$\tilde{F}(\vec{u}) = H\big(F(\vec{x})\big) = H\Big(F\big(h(\vec{u})\big)\Big), \quad \text{pour tout } \vec{u} \in \mathbb{R}^n,$$

c'est-à-dire comme

$$\tilde{F} = H \circ F \circ h$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "H"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "h"] \arrow[r, "\tilde{F}"'] \arrow[ur, dashed] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

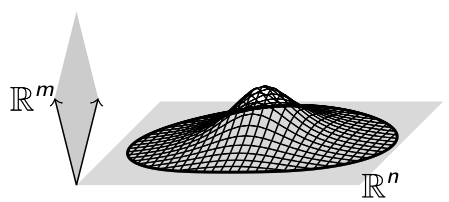
où $H : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est un changement de repère sur $\mathbb{R}^m$ déterminé par l'application h.

Dessin d'un champs

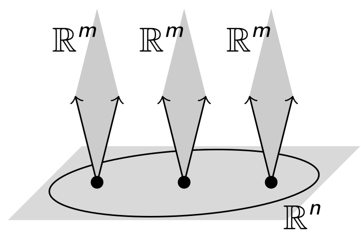
Remarque – Si $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \ \vec{x} \mapsto F(\vec{x})$ est un champ, le repère utilisé pour décrire la valeur $F(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$ n'est pas libre, mais dépend de celui utilisé pour décrire $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Ainsi, un champ ne peut être representé par un graphe $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ comme si c'était une fonction (pour laquelle les repère de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sont indépendants).

Définition – La **représentation graphique**, ou **dessin**, du champ F est l'ensemble des dessins de la valeur $F(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$ au-dessus de chaque point $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire dans un repère de $\mathbb{R}^m$ centré au point $\vec{x}$),



un seul repère pour le graphe d'une fonction vectorielle



union de repères pour le dessin d'un champ de vecteurs

4.2 – Champs scalaires

Dans cette section:

- Champs scalaires de $\mathbb{R}^3$
- Surfaces de niveau
- Le potentiel gravitationnel V et le potentiel de Coulomb ϕ

Champs scalaires de R^3

Definition – Un **champ scalaire sur** $\mathbb{R}^3$ est un champ $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ \vec{x} \mapsto \phi(\vec{x})$ à valeurs dans les nombres.

• Si $\vec{x} = h(\vec{u})$, à priori on a $\tilde{\phi}(\vec{u}) = H\big(\phi(\vec{x})\big)$, où $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un changement de repère dans $\mathbb{R}$ déterminé par h.

• Dans $\mathbb{R}$ il y a une seule direction $\vec{\imath}$, donc H n'affecte que l'*unité de mesure*. Sans unités de mesure, on peut supposer $H(y) = y$.

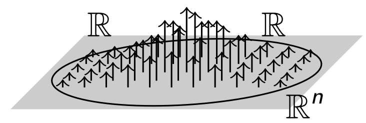
En maths, **un champ scalaire est assimilé à une fonction**

$$\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ \vec{x} \mapsto \phi(x),$$

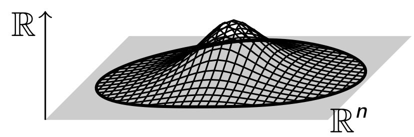
qui se transforme comme

$$\tilde{\phi}(\vec{u}) = \phi(\vec{x}) \quad \text{si} \quad \vec{x} = h(\vec{u})$$

et se représente avec un graphe usuel.



dessin d'un champ scalaire



graphe d'un champ scalaire comme fonction réelle

• Attention en physique, quand l'unité de mesure change!

Exemples de champs scalaires sur $\mathbb{R}^3$

Exemples –

• La *temperature* T et la *pression* P sont des champs scalaires en physique statistique.

• L'*altitude* n'est pas un champ mais une fonction (car la détérmination de l'endroit où on la mesure n'affecte pas le résultat).

• Le *volume* V n'est pas un champ scalaire (car il n'est pas défini sur les points de $\mathbb{R}^3$ mais pour des objets étendus).

La *densité volumique* ν est le champ scalaire qui permet de calculer le volume d'un objet (par intégration).

• La **distance** depuis l'origine: $\boxed{d(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

En coordonnées sphériques: $\boxed{d(r,\varphi,\theta)=r}$

Ceci montre la signification de la variable r.

Exemples: potentiel gravitationnel et de Coulomb

• Le **potentiel gravitationnel** engendré par une masse M située à l'origine O:

$$V(x,y,z) = -\frac{G\,M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

où $G = 6,673 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/kg\,s^2}$ est la *constante gravitationnelle*.

En coordonnées sphériques: $\boxed{V(r,\varphi,\theta) = -\frac{G\,M}{r}}$.

• Le **potentiel électrostatique** ou **potentiel de Coulomb** engendré par une charge immobile Q située à l'origine O:

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

où $\epsilon = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{A\,s/V\,m}$ est la *permittivité diélectrique*.

En coordonnées sphériques: $\boxed{\phi(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{r}}$.

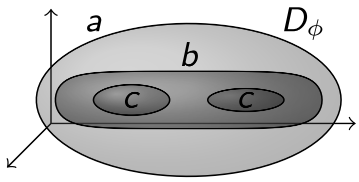
Surfaces de niveau

Définition – Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un champ scalaire.

• Comme une fonction f, ϕ est caractérisé par son **domaine de définition** $D_\phi \subset \mathbb{R}^3$, et il est **de classe** C^k s'il est différentiable jusqu'à l'ordre k.

• Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'analogue des *lignes de niveau* $L_a(f)$ d'une fonction f de deux variables est la **surface de niveau** a de ϕ:

$$S_a(\phi) = \Big\{(x,y,z) \in D_\phi \mid \phi(x,y,z) = a\Big\}.$$



N.B. – En général on ne sait pas tracer le graphe de ϕ, qui est dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice: potentiels gravitationnel et de Coulomb

Énoncé – *Pour le potentiel gravitationnel V et pour le potentiel de Coulomb ϕ, trouver les surfaces de niveau et dessiner le graphe comme fonctions de r.*

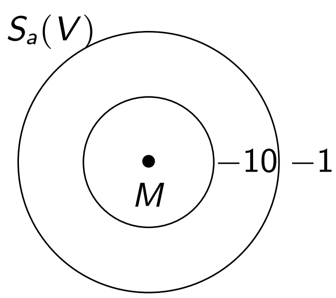
Réponse – En coordonnées sphériques, on a:

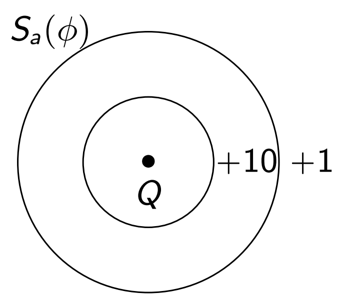
$$V(r,\varphi,\theta) = -\frac{G\,M}{r} \qquad \text{et} \qquad \phi(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}.$$

• Pour $a \in \mathbb{R}$, les surfaces de niveau a sont données par:

$$r = -\frac{G\,M}{a} \quad \text{si } a < 0 \qquad \text{et} \qquad r = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{a} \quad \text{si } a > 0$$

et sont donc des <u>sphères</u> centrées en l'origine



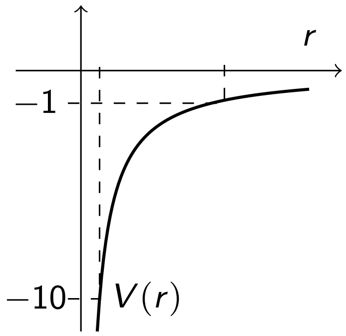


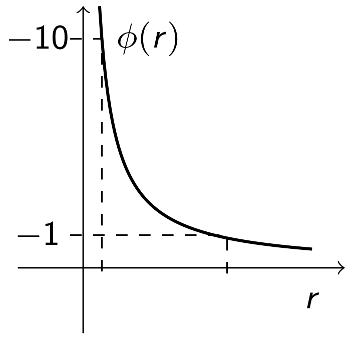
Exercice (suite)

• La différence entre le potentiel gravitationnel V et celui de Coulomb ϕ est dans le <u>sens croissant des niveaux</u> correspondants aux sphères: le graphe des potentiels

$$V(r,\varphi,\theta) = -\frac{G\,M}{r} \qquad \text{et} \qquad \phi(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

dans la seule variable $r > 0$ est:





4.3 – Champs de vecteurs

Dans cette section:

- Champs de vecteurs
- Repères mobiles
- Lois de transformations en coordonnées cylindriques et sphériques
- Champ axial et champ central
- Lignes de champ
- Le champ électrique $\vec{E}$ et le champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}$

Champs de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Définition – Un **champ de vecteurs** ou **champ vectoriel** de $\mathbb{R}^3$ est un champ

$$\vec{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ \vec{x} \longmapsto \vec{V}(\vec{x})$$

à valeur dans les <u>vecteurs de $\mathbb{R}^3$</u>.

Exemples –
• La *position* $\vec{x}$ des points, une *force* $\vec{F}$, les *champs gravitationnel* $\vec{\mathcal{G}}$, *électrique* $\vec{E}$ et *magnétique* $\vec{B}$, ou encore le *potentiel magnétique* $\vec{A}$, sont des champs vectoriels.

• La *vitesse d'écoulement des points d'un fluide* est un champ de vecteurs. La *vitesse de déplacement d'un corps ponctuel* est un champ vectoriel, défini sur la trajectoire du corps.

• La vitesse de déplacement d'un *objet étendu qu'on ne peut pas identifier à son baricentre* <u>n'est pas un champ vectoriel</u>, car elle n'est pas définie sur des <u>points</u>.

Composantes cartesiennes d'un champ de vecteurs

Définition – Soit $\vec{x} \longmapsto \vec{V}(\vec{x})$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

• Si $\vec{x} = (x, y, z)$ est donné en coordonnées cartesiennes, on a

$$\vec{V}(\vec{x}) = V_x(\vec{x})\, \vec{\imath} + V_y(\vec{x})\, \vec{\jmath} + V_z(\vec{x})\, \vec{k},$$

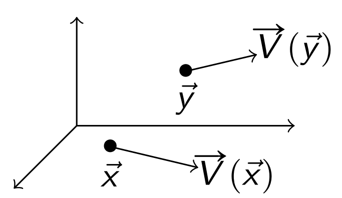
où $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est le repère cartesien de $\mathbb{R}^3$ centré au point $\vec{x}$, et $V_x, V_y, V_z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions réelles qui s'appellent **coefficients** ou **composantes** de $\vec{V}$.

• Le **domaine** de $\vec{V}$ est l'ensemble

$$D_{\vec{V}} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \in D_{V_x},\ \vec{x} \in D_{V_y},\ \vec{x} \in D_{V_z} \right\}.$$

• Le champ est **de classe** C^k si ses coefficients le sont.

• Le **dessin** de $\vec{V}$ consiste des vecteurs $\vec{V}(\vec{x})$ appliqués aux points $\vec{x}$:



Loi de transformation d'un champ vectoriel

Remarque – Soit $\vec{V}$ un champ vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

• Même si on ne considère pas les unités de mesure, un chmt de variables $\vec{x} = h(\vec{u})$ peut modifier le repère pour $\vec{V}(\vec{x})$, dans la direction des vecteurs.

• En général, si $\vec{x} = h(\vec{u})$, le champ $\vec{V}(\vec{x})$ se transforme en

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\tilde{V}}(\vec{u}) &= H\big(\vec{V}\big(h(\vec{u})\big)\big) \\ &= \tilde{V}_x(\vec{u})\ H(\vec{\imath}) + \tilde{V}_y(\vec{u})\ H(\vec{\jmath}) + \tilde{V}_z(\vec{u})\ H(\vec{k})\end{aligned}}$$

où $\tilde{V}_x(\vec{u}) = V_x\big(h(\vec{u})\big)$ (même chose pour $\tilde{V}_y$ et $\tilde{V}_z$),

et $H(\vec{\imath}),\ H(\vec{\jmath}),\ H(\vec{k})$ sont les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ exprimés dans le nouveau repère de $\mathbb{R}^3$ déterminé par h,

c'est-à-dire le repère $\big(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big)$ qui permet de décrire $\vec{u} = u\,\vec{e}_1 + v\,\vec{e}_2 + w\,\vec{e}_3$ par les coordonnées (u, v, w).

Repères mobiles

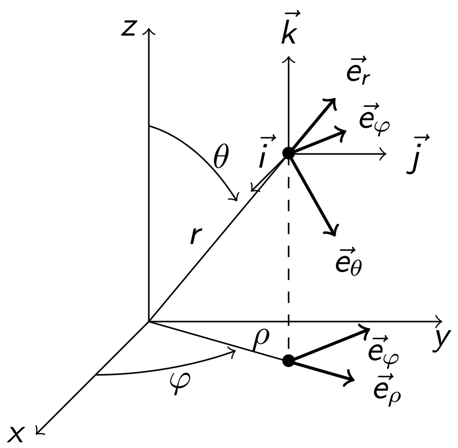
Définition – Un **repère mobile** est un repère centré en tout point P variable, et qui dépend de la représentation en coordonnées de P: les vecteurs indiquent la direction de variation des coordonnées de P.

En particulier:

• **repère cartesien:**
$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

• **repère cylindrique:**
$(\vec{e}_\rho\,, \vec{e}_\varphi\,, \vec{k})$

• **repère sphérique:**
$(\vec{e}_r\,, \vec{e}_\varphi\,, \vec{e}_\theta\,)$



Attention – Les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ ne changent pas de direction quand P bouge, mais les autres vecteurs si !

Transformations des repères cartesien, cylindrique et sphérique

Proposition – *Les transformations H entre les repères cartesien, cylindrique et sphérique, sont les suivantes:*

- **cartesien – cylindrique:**

Si $(x, y, z) = h(\rho, \varphi, z)$, *avec* $\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \ \cos\varphi \\ y = \rho \ \sin\varphi \\ z = z \end{array} \right.$, *on a*

$$\left[\begin{array}{l} \vec{e_\rho} \ = \cos\varphi \ \vec{\imath} + \sin\varphi \ \vec{\jmath} \\ \vec{e_\varphi} \ = -\sin\varphi \ \vec{\imath} + \cos\varphi \ \vec{\jmath} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{array} \right. \quad et \quad \left[\begin{array}{l} \vec{\imath} = \cos\varphi \ \vec{e_\rho} \ - \sin\varphi \ \vec{e_\varphi} \\ \vec{\jmath} = \sin\varphi \ \vec{e_\rho} \ + \cos\varphi \ \vec{e_\varphi} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{array} \right.$$

Preuve – La première formule vient de la définition des vecteurs $\vec{e_\rho}$, $\vec{e_\varphi}$, et la deuxième formule s'obtient en inversant le système donné par la première.

Transformations des repères cartesien, cylindriques et sphériques

- **cartesien – sphérique:**

Si $(x, y, z) = h(r, \varphi, \theta)$, *avec* $\left\{ \begin{array}{l} x = r \ \cos\varphi \sin\theta \\ y = r \ \sin\varphi \sin\theta \\ z = r \ \cos\theta \end{array} \right.$, *on a*

$$\left[\begin{array}{l} \vec{e_r} \ = \cos\varphi \ \sin\theta \ \vec{\imath} + \sin\varphi \ \sin\theta \ \vec{\jmath} + \cos\theta \ \vec{k} \\ \vec{e_\varphi} \ = -\sin\varphi \ \vec{\imath} + \cos\varphi \ \vec{\jmath} \\ \vec{e_\theta} \ = \cos\varphi \ \cos\theta \ \vec{\imath} + \sin\varphi \ \cos\theta \ \vec{\jmath} - \sin\theta \ \vec{k} \end{array} \right.$$

et

$$\left[\begin{array}{l} \vec{\imath} = \cos\varphi \ \sin\theta \ \vec{e_r} \ - \sin\varphi \ \vec{e_\varphi} \ + \cos\varphi \ \cos\theta \ \vec{e_\theta} \\ \vec{\jmath} = \sin\varphi \ \sin\theta \ \vec{e_r} \ + \cos\varphi \ \vec{e_\varphi} \ + \sin\varphi \ \cos\theta \ \vec{e_\theta} \\ \vec{k} = \cos\theta \ \vec{e_r} \ - \sin\theta \ \vec{e_\theta} \end{array} \right.$$

Preuve – La première formule vient de la définition des vecteurs $\vec{e_r}$, $\vec{e_\varphi}$, $\vec{e_\theta}$ et la deuxième formule s'obtient en inversant le système donné par la première.

Champ vectoriel en coordonnées

Conclusion – Un champ vectoriel $\vec{V}(\vec{x})$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit dans le repère mobile de sa variable $\vec{x}$:

• en **coordonnées cartesiennes** (x, y, z):

$$\vec{V} = V_x \vec{\imath} + V_y \vec{\jmath} + V_z \vec{k},$$

• en **coordonnées cylindriques** (ρ, φ, z):

$$\vec{V} = V_\rho \vec{e_\rho} + V_\varphi \vec{e_\varphi} + V_z \vec{k},$$

• en **coordonnées sphériques** (r, φ, θ):

$$\vec{V} = V_r \vec{e_r} + V_\varphi \vec{e_\varphi} + V_\theta \vec{e_\theta},$$

où les coefficients V_x, etc, sont des fonctions $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

La **transformation** d'une forme à une autre est donnée par le **changement de coordonnées** usuel sur les coefficients, et par le **changement de repère** décrit ci-dessus sur les vecteurs.

Champ axial et champ central

Définition – Un champ de vecteurs $\vec{V}$ de $\mathbb{R}^3$ s'appelle:

• **Axial** s'il ne dépend que de la distance ρ d'un axe (supposons $\vec{k}$) et est dirigé dans la direction radiale (par rapport au "radius" ρ).

En coordonnées cylindrique, il s'écrit $\boxed{\vec{V}(\rho) = f(\rho)\, \vec{e_\rho}}$

• **Central** s'il ne dépend que de la distance r d'un point (supposons l'origine) et est dirigé dans la direction radiale (par rapport au "radius" r).

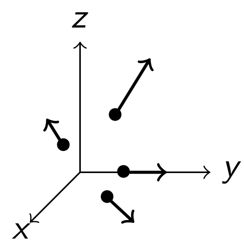
En coordonnées sphériques, il s'écrit $\boxed{\vec{V}(r) = f(r)\, \vec{e_r}}$

Exemples de champs vectoriels

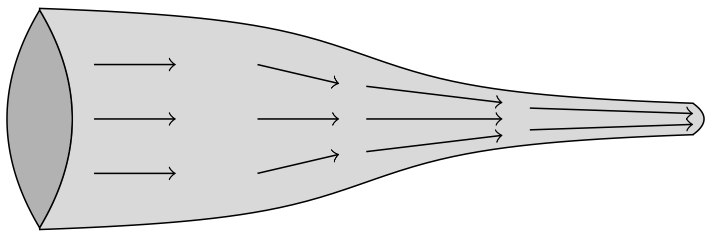
Exemples –

- Le **vecteur position** est le champ central

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{x} &= x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}\\ &= \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{k}\\ &= r\,\vec{e}_r\end{aligned}}$$



- La **vitesse d'écoulement d'un fluide**:



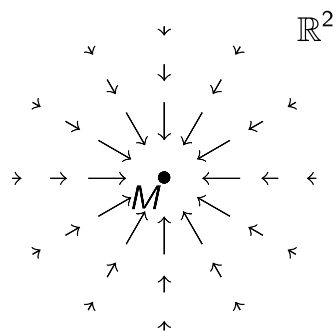
Exemples de champs vectoriels

- Le **champ gravitationnel** engendré par une masse M est le champ central

$$\boxed{\vec{\mathcal{G}}(r) = -\frac{GM}{r^2}\,\vec{e}_r}$$

Une masse m situé à distance r de M est soumise à la **force gravitationnelle**

$$\vec{F}(r) = m\vec{\mathcal{G}}(r) = -\frac{GMm}{r^2}\,\vec{e}_r\,.$$

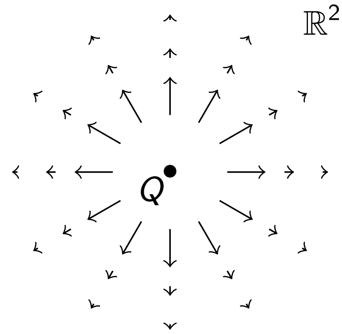


- Le **champ électrique** engendré par une charge Q est le champ central

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{r^2}\,\vec{e}_r}$$

Une charge q située à distance r de Q est soumise à la **force de Coulomb**

$$\vec{F}(r) = q\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Qq}{r^2}\,\vec{e}_r\,.$$

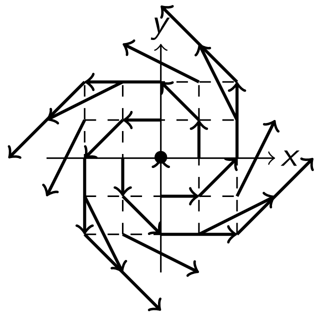


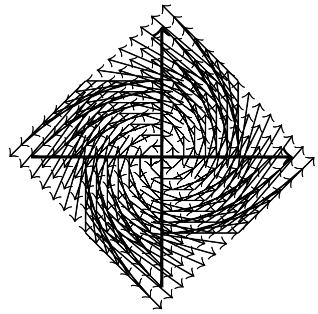
Exercices

Énoncé – *Trouver le domaine des champs de vecteurs suivants, les dessiner en un point générique de $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$) et en deux ou trois points particuliers au choix. Enfin, exprimer ces champs en les autres coordonnées.*

- $\vec{V}(x,y) = (-y,x) = -y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$

Réponse –
Domaine $= \mathbb{R}^2$.





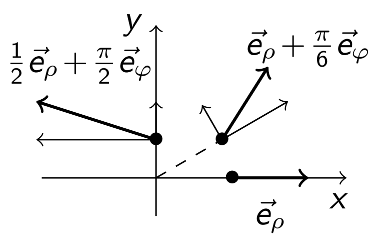
En coord. polaires:

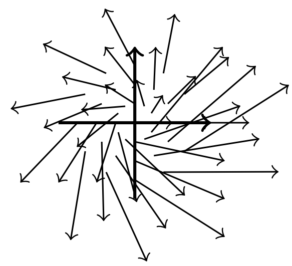
$$\begin{aligned}\vec{V}(\rho,\varphi) &= -\rho\sin\varphi\left(\cos\varphi\,\vec{e_\rho} - \sin\varphi\,\vec{e_\varphi}\right) + \rho\cos\varphi\left(\sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi}\right)\\ &= \rho\left(-\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi\right)\vec{e_\rho} + \rho\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\vec{e_\varphi}\\ &= \boxed{\rho\,\vec{e_\varphi}}.\end{aligned}$$

Exercices

- $\vec{V}(\rho,\varphi) = \rho\,\vec{e_\rho} + \varphi\,\vec{e_\varphi}$

Réponse – $\rho > 0$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$, ainsi $\quad D_V = R_+^* \times [0, 2\pi[$.



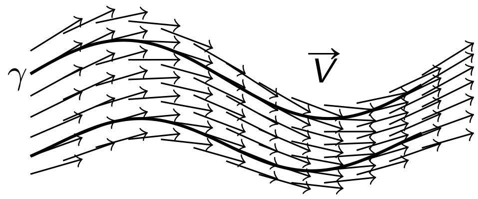


En coord. cartesiennes:

$$\begin{aligned}\vec{V}(x,y) &= \rho\Big(\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}\Big) + \varphi\Big(-\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}\Big)\\ &= \Big(\rho\cos\varphi - \varphi\sin\varphi\Big)\vec{\imath} + \Big(\rho\sin\varphi + \varphi\cos\varphi\Big)\vec{\jmath}\\ &= \Big(x - \arctan\tfrac{y}{x}\,\tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)\vec{\imath}\\ &\qquad + \Big(y + \arctan\tfrac{y}{x}\,\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)\vec{\jmath} \quad \text{si } x \neq 0 \text{ et } y > 0.\end{aligned}$$

Lignes de champ

Définition – Les **lignes de champ** ou **courbes intégrales** d'un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ sont les courbes γ qui ont $\overrightarrow{V}(\vec{x})$ comme vecteur tangent en tout point $\vec{x} \in \gamma$.



• Si γ est une **courbe paramétrée** par $\vec{x}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, avec $t \in \mathbb{R}$, le **vecteur tangent à** γ **au point** $\vec{x}(t)$ est le vecteur des dérivées

$$\dot{\vec{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)).$$

• Alors γ est une ligne de champ pour $\overrightarrow{V} = V_x \vec{\imath} + V_y \vec{\jmath} + V_z \vec{k}$ si et seulement si, pour tout t, on a:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \overrightarrow{V}(\vec{x}(t)) \quad \text{c-à-d} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = V_x\big(x(t), y(t), z(t)\big) \\ \dot{y}(t) = V_y\big(x(t), y(t), z(t)\big) \\ \dot{z}(t) = V_z\big(x(t), y(t), z(t)\big) \end{cases}$$

• Par tout point fixé $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$ il passe <u>une seule</u> ligne de champ.

Exercice

Énoncé – *Trouver et dessiner les lignes de champ des champs de vecteurs suivants.*

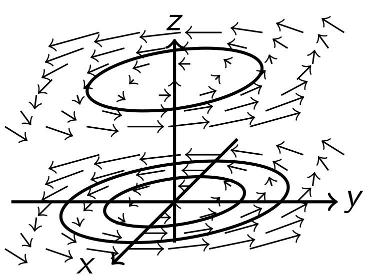
• $\overrightarrow{V}(x, y, z) = (-y, x, 0) = -y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$

Réponse – $\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ décrit une ligne de champ si:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= \big(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\big) \\ &= \overrightarrow{V}\big(x(t), y(t), z(t)\big) \\ &= \big(-y(t), x(t), 0\big) \end{aligned} \quad \text{c.-à-d.} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases}.$$

Ainsi $\dot{x}(t)\,x(t) + \dot{y}(t)\,y(t) = \dfrac{d}{dt}\big(x(t)^2 + y(t)^2\big) = 0,$ et donc

$$\begin{cases} x(t)^2 + y(t)^2 \text{ est constant} \\ z(t) \text{ est constant} \end{cases}.$$



Au final, γ decrit un cercle sur un plan horizontal centré sur l'axe Oz.

Exercice

- **Champ gravitationnel**: $\vec{\mathcal{G}}(r) = -\dfrac{GM}{r^2}\,\vec{e_r}\,.$

Réponse – Les lignes de champ de $\vec{\mathcal{G}}$ donnent la *trajectoire* d'un corps sousmis à la force gravitationnelle exercée par la masse M.

- En coord. sphériques, une courbe paramétrée γ est donnée par

$$r(t) \in \,]0,\infty[\,, \quad \varphi(t) \in [0,2\pi[\quad \text{et} \quad \theta(t) \in \,]0,\pi[.$$

- Les points de la courbe sont donnés par les vecteurs positions

$$\vec{x}(t) = r(t)\,\vec{e_r}\,(t),$$

où le vecteur $\vec{e_r}$ dépend aussi de t car il <u>change de direction</u> avec le point $\vec{x}(t)$ (contrairement à $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$).

- Le vecteur tangent à γ au point $\vec{x}(t)$ est donc

$$\dot{\vec{x}}(t) = \dot{r}(t)\,\vec{e_r}\,(t) + r(t)\,\dot{\vec{e}}_r(t).$$

- Pour trouver les lignes de champ, il nous faut un petit lemme.

Dérivée d'un vecteur à norme constante

Lemme – *Soit $\vec{u} = \vec{u}(t)$ un vecteur paramétré par $t \in \mathbb{R}$.*
Si $\vec{u}$ a <u>norme constante non nulle</u>, c-à-d $||\vec{u}(t)|| = c \neq 0$, alors le vecteur dérivé $\dot{\vec{u}}$ est toujours <u>orthogonal</u> à $\vec{u}$, c-à-d

$$\vec{u}(t)\cdot\dot{\vec{u}}(t) = 0 \quad \textit{pour tout } t \quad \textit{(produit scalaire).}$$

Preuve – On écrit $||\vec{u}(t)|| = \sqrt{\vec{u}(t)\cdot\vec{u}(t)}$ et on dérive:

$$\begin{aligned}\Big(||\vec{u}(t)||\Big)' &= \Big(\sqrt{\vec{u}(t)\cdot\vec{u}(t)}\Big)' = \frac{\dot{\vec{u}}(t)\cdot\vec{u}(t) + \vec{u}(t)\cdot\dot{\vec{u}}(t)}{2\sqrt{\vec{u}(t)\cdot\vec{u}(t)}} \\ &= \frac{2\,\vec{u}(t)\cdot\dot{\vec{u}}(t)}{2\sqrt{\vec{u}(t)\cdot\vec{u}(t)}} = \frac{\vec{u}(t)\cdot\dot{\vec{u}}(t)}{||\vec{u}(t)||}\end{aligned}$$

On a donc

$$||\vec{u}(t)|| = c \quad \Leftrightarrow \quad \Big(||\vec{u}(t)||\Big)' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}(t)\cdot\dot{\vec{u}}(t) = 0. \quad \square$$

Exercice (suite)

- Resumé: pour une courbe γ en coordonnées sphérique

$$\vec{x}(t) = r(t)\,\vec{e_r}\,(t),$$

le vecteur tangent est

$$\dot{\vec{x}}(t) = \dot{r}(t)\,\vec{e_r}\,(t) + r(t)\;\dot{\vec{e}}_r(t),$$

et, puisque $\vec{e_r}\,(t)$ a norme constante 1, le vecteur $\dot{\vec{e}}_r(t)$ est orthogonal à $\vec{e_r}\,(t)$, c-à-d avec seulement des composantes dans les directions $\vec{e_\varphi}\,(t)$ et $\vec{e_\theta}\,(t)$.

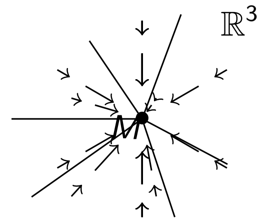
- Alors γ est une ligne de champ de $\vec{\mathcal{G}}$ si

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= \dot{r}(t)\;\vec{e_r}\,(t) + r(t)\;\dot{\vec{e}}_r(t) \\ &= \vec{\mathcal{G}}\left(\vec{x}(t)\right) = -\frac{GM}{r(t)^2}\;\vec{e_r}\,(t) \end{aligned}$$

c'est-à-dire si $\left\{ \begin{array}{ll} \dot{r}(t) = -\dfrac{GM}{r(t)^2} & (1) \\ \dot{\vec{e}}_r(t) = 0 & (2) \end{array} \right. .$

Exercice (suite)

- (2) dit que $\vec{e_r}\,(t)$ est constant.
Donc les lignes de champ sont des droites *radiales* centrées en M.



- (1) donne la distance $r(t)$ de M:

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) = -\frac{GM}{r(t)^2} \quad &\Rightarrow \quad r(t)^2\;\dot{r}(t) = \frac{1}{3}\,\frac{d}{dt}\left(r(t)^3\right) = -GM \\ &\Rightarrow \quad r(t)^3 = -3GM\,t + r_0^3 \\ &\Rightarrow \quad \boxed{r(t) = \sqrt[3]{r_0^3 - 3GM\,t}} \end{aligned}$$

où $r_0 = r(0)$ est la distance initiale du corps de M.
Pour que $r(t)$ soit positif, il faut que $t \leqslant r_0^3/3GM$.

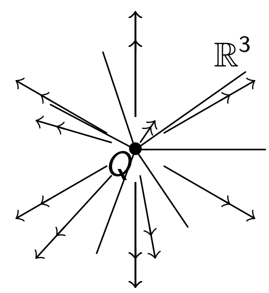
- En somme, un corps qui se trouve à distance r_0 de M est attiré par la masse (car $r(t)$ diminue quand t augmente), et la touche à l'instant $t = r_0^3/3GM$. Les lignes de champ sont orientée vers M: le champ gravitationnel est **attractif**.

Exercice (suite)

- **Champ électrique**: $\overrightarrow{E}(r) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{Q}{r^2}\,\vec{e_r}$

  Réponse brève – Les lignes de champ sont aussi des droites radiales, passant par la position de la charge Q qui engendre le champ.

  Cette fois, les lignes de champs sont orientée vers l'extérieur: le champ électrique est **répulsif**.



4.4 – Champs conservatifs

Dans cette section:

- Gradient
- Potentiel scalaire et champs conservatifs
- Rotationnel
- Champs irrotationnels
- Ensembles connexes, simplement connexes, contractiles
- Lemme de Poincaré (cas simplement connexe)
- Calcul du potentiel scalaire
- Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ et le champ gravitationnel $\overrightarrow{\mathcal{G}}$

Gradient d'un champ scalaire

Définition – Soit $\phi : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un champ scalaire. Le **gradient** de ϕ est le champ de vecteurs $\vec{\nabla}\phi = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ sur D donné par les expressions:

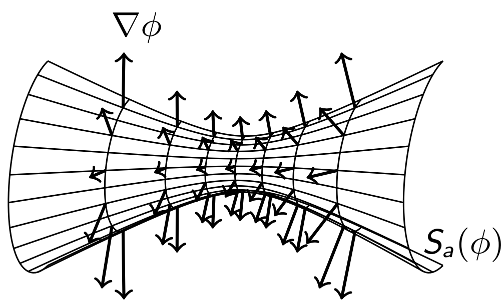
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\,\vec{k} \\
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\,\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\,\vec{e_\varphi} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\,\vec{k} \\
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial r}\,\vec{e_r} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\,\vec{e_\varphi} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\,\vec{e_\theta}\,.
\end{aligned}$$

Exemple – Le gradient de $\phi(r,\varphi,\theta) = r\varphi\sin\theta$ est

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\phi(r,\varphi,\theta) &= \frac{\partial(r\varphi\sin\theta)}{\partial r}\,\vec{e_r} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial(r\varphi\sin\theta)}{\partial \varphi}\,\vec{e_\varphi} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial(r\varphi\sin\theta)}{\partial \theta}\,\vec{e_\theta} \\
&= \varphi\sin\theta\,\vec{e_r} + \frac{r\sin\theta}{r\sin\theta}\,\vec{e_\varphi} + \frac{r\varphi\cos\theta}{r}\,\vec{e_\theta} \\
&= \varphi\sin\theta\,\vec{e_r} + \vec{e_\varphi} + \varphi\cos\theta\,\vec{e_\theta}
\end{aligned}$$

Propriétés du gradient

Proposition – *Le gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ est orthogonal aux surfaces de niveau de ϕ en tout point, et indique le sens de plus forte croissance de ϕ.*



Proposition – *Le gradient $\vec{\nabla} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}$ est un* opérateur linéaire *agissant sur les champs scalaires (ici f et g):*

$$\vec{\nabla}(\lambda\, f + \mu\, g) = \lambda\,\vec{\nabla}f + \mu\,\vec{\nabla}g, \quad \textit{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Sur un produit, il agit par la règle de Leibniz:

$$\vec{\nabla}(f\,g) = \left(\vec{\nabla}f\right)\,g + f\,\left(\vec{\nabla}g\right).$$

Potentiel scalaire et champ conservatif

Définition –
• On appelle **champ de gradient** tout champ vectoriel $\vec{V}$ qui est le gradient d'un champ scalaire ϕ, c'est-à-dire de la forme

$$\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi.$$

• Une force $\vec{F}$ est **conservative** si, quand elle agit sur un système isolé, l'*énérgie mécanique* du système est conservée.

Si on voit $\vec{F}$ comme un champ de force, cela arrive s'il existe un champ scalaire ϕ tel que

$$\vec{F} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi.$$

Dans ce cas, le champ ϕ s'appelle **potentiel (scalaire)** de $\vec{F}$.

• Donc <u>le potentiel de $\vec{V} = \vec{\nabla}\phi$ est le champ $-\phi$</u>!

Exemples de forces conservatives

Exemples –

• La force gravitationnelle $\vec{F}(r) = m\vec{\mathcal{G}}(r)$ et la force de Coulomb $\vec{F}(r) = q\vec{E}(r)$ sont conservatives.

Justement: quel est leur potentiel?

• La *force de Lorentz* (due à un champ magnétique $\vec{B}$), la *pression*, le *frottement* ou un *choc* sont des forces non-conservatives.

Questions –

• Comment savoir si une force $\vec{F}$ est conservative?

• Si elle l'est, comment trouver son potentiel?

Rotationnel d'un champ vectoriel

Définition – Soit $\vec{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs. Le **rotationnel de** $\vec{V}$ est le champ de vecteurs sur D, noté $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$ (produit vectoriel, en France $\wedge$), donné par:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e_\rho} + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho}\right)\vec{e_\varphi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{k}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta\, V_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_\varphi} \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rV_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta}
\end{aligned}$$

Exemples de rotationnel

Exemples – En coordonnées cartesiennes:

- $\vec{V}(x,y,z) = -y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}(x,y,z) &= \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial(-y)}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)\vec{k} \\
&= 0\,\vec{\imath} + 0\,\vec{\jmath} + (1+1)\,\vec{k} = 2\,\vec{k}.
\end{aligned}$$

- $\vec{V}(x,y,z) = x^2\,\vec{\imath} + 2xy\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}(x,y,z) &= 0\,\vec{\imath} + 0\,\vec{\jmath} + (2y)\,\vec{k} \\
&= 2y\,\vec{k}.
\end{aligned}$$

Exemples de rotationnel

Exemples – En coordonnées cylindriques et sphériques:

- $\vec{V}(\rho,\varphi,z) = \sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \rho\,\vec{k}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}(\rho,\varphi,z) &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} - \frac{\partial 0}{\partial z}\right)\vec{e_\rho} + \left(\frac{\partial\sin\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\rho}{\partial\rho}\right)\vec{e_\varphi} \\ &\qquad + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho\cdot 0)}{\partial\rho} - \frac{\partial\sin\varphi}{\partial\varphi}\right)\vec{k} \\ &= -\vec{e_\varphi} - \frac{\cos\varphi}{\rho}\,\vec{k}\,.\end{aligned}$$

- $\vec{V}(r,\varphi,\theta) = \sin\varphi\,\vec{e_r} + r\,\vec{e_\theta}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}(r,\varphi,\theta) &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta\cdot 0)}{\partial\theta} - \frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)\vec{e_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r^2}{\partial r} - \frac{\partial\sin\varphi}{\partial\theta}\right)\vec{e_\varphi} \\ &\qquad + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\sin\varphi}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r\cdot 0)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} \\ &= 0\,\vec{e_r} + \frac{2r}{r}\,\vec{e_\varphi} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\,\vec{e_\theta} \\ &= 2\,\vec{e_\varphi} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\,\vec{e_\theta}\,.\end{aligned}$$

Champs irrotationnels

Proposition – *Le rotationnel est un* opérateur linéaire *agissant sur les champs de vecteurs (ici $\vec{U}$ et $\vec{V}$):*

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\lambda\,\vec{U} + \mu\,\vec{V}) = \lambda\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U} + \mu\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}, \quad \textit{pour tout } \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

et satisfait l'identité

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi) = 0, \qquad \textit{pour tout champ scalaire } \phi.$$

Définition – Un champ de vecteurs $\vec{V}$ se dit **irrotationnel** si

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \vec{0}.$$

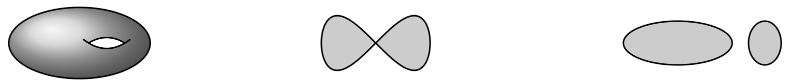
- Donc tout champ de gradient $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ est irrotationnel.

- Mais un champ irrotationnel n'est pas toujours un gradient! Pour savoir s'il l'est, il existe un critère basé sur les proprietés *topologiques* du domaine D du champ.

Ensembles simplement connexes et contractiles

Définition – Un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ s'appelle:

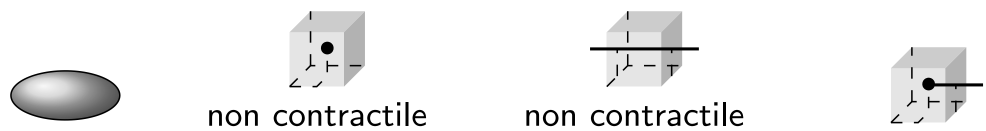
• **Connexe** si tous les points de D peuvent être joint par une courbe contenue dans D.



• **Simplement connexe** s'il est connexe et toute courbe fermée dans D peut être déformée en un point.

$\mathbb{R}^n$ simpl. connexe
$\mathbb{R}^2\setminus$ point, $\mathbb{R}^3\setminus$ droite
non simpl. connexe

• **Contractile** si on peut déformer l'espace entier D en un point.



Lemme de Poincaré (cas simplement connexe)

Théorème – Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ et soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble simplement connexe. Alors:

$$\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi \quad \text{sur } D \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = 0 \quad \text{sur } D.$$

• Ainsi, si $\vec{F}$ est un champ de force sur $D \subset \mathbb{R}^3$:

Si D est **simplement connexe**:		
$\vec{F}$ **est conservative** (a un potentiel scalaire)	$\Longleftrightarrow$	$\vec{F}$ **est un champ irrotationnel**

• **Attention –** On ne peut rien dire sur $\vec{F}$ si D n'est pas simplement connexe: tout peut arriver!

Calcul du potentiel scalaire

Problème – *Soit $\vec{V}$ un champ vectoriel de $\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \vec{0}$, défini sur un domaine D simplement connexe.*
Trouver son potentiel scalaire ϕ, tel que $\vec{V} = -\vec{\nabla}\phi$.

Méthode – Pour simplifier, on cherche l'opposé de ϕ: une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\vec{V} = \vec{\nabla} f$. En coordonnées cartesiennes:

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = V_x, \qquad (2) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = V_y, \qquad (3) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = V_z.$$

- On intègre (1) et on trouve

$$f(x,y,z) = \int V_x(x,y,z)\,dx + g(y,z). \quad (4)$$

- On dérive f par rapport à y, on trouve $\frac{\partial g}{\partial y}$ avec (2) et on l'intègre:

$$g(y,z) = \int \frac{\partial g}{\partial y}(y,z)\,dy + h(z). \quad (5)$$

- On met (5) dans (4) pour obtenir à nouveau f. On dérive f par rapport à z et on utilise (3) pour trouver $h'(z)$ et donc $h(z)$.
- À rebour, on insère $h(z)$ dans (5) pour avoir $g(y,z)$, qu'on met dans (4), et on obtient enfin $f(x,y,z)$.

Exemple: calcul du potentiel scalaire

Exemple – Soit $\vec{V}(x,y,z) = 2xy\,\vec{\imath} + (x^2+z)\,\vec{\jmath} + y\,\vec{k}$.

- D'abord on vérifie que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \vec{0}$.
- Puisque $\vec{V}$ est défini sur tout $\mathbb{R}^3$, qui est simplement connexe, par le Lemme de Poincaré on sait que $\vec{V}$ est un champ de gradient.
- Cherchons la fonction f telle que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$. On a

$$(1) \quad \tfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \qquad (2) \quad \tfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + z, \qquad (3) \quad \tfrac{\partial f}{\partial z} = y.$$

- (1) donne $\quad f(x,y,z) = \displaystyle\int 2xy\,dx + g(y,z) = x^2y + g(y,z)$.
- (2) donne $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial g}{\partial y} = x^2 + z$, $\quad$ d'où suit $\quad \frac{\partial g}{\partial y} = z$,

ensuite $\quad g(y,z) = \displaystyle\int z\,dy + h(z) = zy + h(z)$

et enfin $\quad f(x,y,z) = x^2y + zy + h(z)$.

- (3) donne $\quad \frac{\partial f}{\partial z} = y + h'(z) = y$, $\quad$ d'où $\quad h'(z) = 0 \quad$ et $\quad h(z) = c$.
- On a alors $\boxed{f(x,y,z) = x^2y + zy + c}$.

Exemple: potentiel du champ gravitationnel

Exemple – Soit $\vec{\mathcal{G}}(r) = -\dfrac{GM}{r^2}\,\vec{e_r}$ le champ gravitationnel.

• D'abord, vérifions qu'il admet un potentiel:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathcal{G}}(r) = -\tfrac{1}{r}\,\tfrac{\partial}{\partial\theta}\left(-\tfrac{GM}{r^2}\right)\,\vec{e_\varphi} + \tfrac{1}{r\sin\theta}\,\tfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(-\tfrac{GM}{r^2}\right)\,\vec{e_\theta} = \vec{0}.$$

• Le champ $\vec{\mathcal{G}}$ est défini sur $D = \{(r,\varphi,\theta) \mid r > 0\} = \mathbb{R}^3 \backslash$origine, qui est simplement connexe. Par le Lemme de Poincaré, $\vec{\mathcal{G}}$ admet donc un potentiel scalaire.

• En coordonnées sphériques: cherchons une fonction $\phi(r,\varphi,\theta)$ telle que $\vec{\mathcal{G}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$, c'est-à-dire

$$-\tfrac{\partial\phi}{\partial r}\,\vec{e_r} - \tfrac{1}{r\sin\theta}\,\tfrac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,\vec{e_\varphi} - \tfrac{1}{r}\,\tfrac{\partial\phi}{\partial\theta}\,\vec{e_\theta} = -\tfrac{GM}{r^2}\,\vec{e_r}\,,$$

Cela donne les équations

$$(1)\quad \tfrac{\partial\phi}{\partial r} = \tfrac{GM}{r^2}, \qquad (2)\quad \tfrac{\partial\phi}{\partial\varphi} = 0, \qquad (3)\quad \tfrac{\partial\phi}{\partial\theta} = 0.$$

• (2) et (3) disent que ϕ ne dépend pas de φ et de θ.

• (1) devient alors $\phi'(r) = \frac{GM}{r^2}$, d'où suit $\phi(r) = -\frac{GM}{r} = V(r)$.

4.5 – Champs incompressibles

Dans cette section:

- Divergence
- Champs à divergence nulle (incompressibles, solénoïdaux)
- Potentiel vectoriel
- Lemme de Poincaré (cas contractile)
- Calcul du potentiel vectoriel
- Le champ magnétique $\vec{B}$ et son potentiel $\vec{A}$

Divergence

Définition – Soit $\vec{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs. La **divergence** de $\vec{V}$ est le champ scalaire sur D, noté $\mathrm{div}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ (produit scalaire), donné par:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\vec{V} &= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \\
\mathrm{div}\,\vec{V} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\, V_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \\
\mathrm{div}\,\vec{V} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\, V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, V_\theta)}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

Exemples –

- $\vec{V}(x,y) = -y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{div}\,\vec{V}(x,y) = 0.$
- $\vec{V}(x,y,z) = x^2\,\vec{\imath} + 2xy\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \mathrm{div}\,\vec{V}(x,y,z) &= 2x + 2x + 1 \\ &= 4x + 1 \end{aligned}$.
- $\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r^2}\,\vec{e_r} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{div}\,\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{r^2}\right) = 0$

Propriétés de la divergence

Proposition – *La divergence est un* opérateur linéaire *agissant sur les champs de vecteurs (ici $\vec{U}$ et $\vec{V}$):*

$$\mathrm{div}\,(\lambda\,\vec{U} + \mu\,\vec{V}) = \lambda\,\mathrm{div}\,\vec{U} + \mu\,\mathrm{div}\,\vec{V}, \qquad \textit{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

et satisfait aux identités suivantes:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,(\phi\vec{V}) &= \phi\,\mathrm{div}\,\vec{V} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi \cdot \vec{V} \\
\mathrm{div}\,(\vec{U} \wedge \vec{V}) &= \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U}) \cdot \vec{V} - \vec{U} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{V}) \\
\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi) &= \Delta\phi \qquad (= \textit{Laplacien}) \\
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{V}) &= \Delta\vec{V} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} \qquad (\Delta\vec{V} = \textit{Laplacien vectoriel}) \\
\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}) &= 0
\end{aligned}$$

pour tout champ scalaire ϕ.

Champs à divergence nulle, incompressibles, solénoïdaux

Définition –

• Un champ vectoriel $\vec{V}$ est **à divergence nulle** si $\operatorname{div} \vec{V} = 0$.

• Un fluide est **incompressible** si son volume reste constant quand il est sousmis à une pression. (Par exemple, un liquide est consideré incompressible, un gaz non.) Cela arrive si le champ $\vec{V}$ qui décrit la *vitesse d'écoulement* du fluide a divergence nulle.

• Un champ de vecteurs $\vec{V}$ qui décrit un *courant de matière* est dit **solénoïdal** (du grèque *sôlen* = tuyau) si le volume de matière transportée est constant (comme s'il était contraint dans un tuyau): cela arrive si $\operatorname{div} \vec{V} = 0$.

Exemple – Un champ de gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi$ est solénoïdal si

$$\operatorname{div} (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi) = \Delta \phi = 0,$$

c'est-à-dire si la fonction ϕ est harmonique.

Potentiel vectoriel et invariance de jauge

Définition – Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs. On appelle **potentiel vectoriel** de $\vec{V}$ un champ $\vec{U}$ tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{U}$.

Proposition –

• *Si le champ $\vec{V}$ admet un potentiel vectoriel, alors $\vec{V}$ est à divergence nulle.* (Car $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{U}$ et $\operatorname{div} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{U} = 0$.)

• *Si $\vec{U}$ est un potentiel de $\vec{V}$, alors $\vec{U} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi$ l'est aussi, quelconque soit le champ scalaire ϕ.*

(En effet, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}} \left(\vec{U} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi \right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{U} = \vec{V},$$

car $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi = \vec{0}$ pour tout ϕ.)

Définition – Le remplacement $\vec{U} \to \vec{U} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi$ s'appelle **transformation de jauge**, la liberté dans le choix du potentiel vectoriel est due à l'**invariance de jauge** du champ $\vec{V}$ et le choix d'un potentiel s'appelle **choix de jauge**.

Lemme de Poincaré (cas contractile)

Remarque – Si $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$ alors $\mathrm{div}\,\vec{V} = 0$, mais si $\mathrm{div}\,\vec{V} = 0$ alors $\vec{V}$ <u>n'est pas toujours</u> $= \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$!

Théorème – Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ et soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble <u>contractile</u>. Alors:

$$\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U} \quad \text{sur } D \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{div}\,\vec{V} = 0 \quad \text{sur } D.$$

• Ainsi, si $\vec{V}$ est un champ de vecteurs sur $D \subset \mathbb{R}^3$:

Si D est **contractile**:		
$\vec{V}$ **admet un potentiel vectoriel**	$\Longleftrightarrow$	$\vec{V}$ **est à divergence nulle** (incompressible / solénoïdal)

• **Attention –** On ne peut rien dire sur $\vec{V}$ si D n'est pas contractile: tout peut arriver!

Calcul du potentiel vectoriel

Problème – *Soit* $\vec{V}$ *un champ vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *tel que* $\mathrm{div}\,\vec{V} = 0$, *défini sur un ensemble contractile. Trouver son potentiel vectoriel* $\vec{U}$, *tel que* $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$.

Méthode – En coordonnées cartesiennes, le potentiel vectoriel de $\vec{V}$ est un champ $\vec{U} = f\,\vec{\imath} + g\,\vec{\jmath} + h\,\vec{k}$ défini sur D tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$, c'est-à-dire

$$(1)\quad \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} = V_x, \qquad (2)\quad \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} = V_y, \qquad (3)\quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = V_z.$$

• Il s'agit de trouver les trois fonctions f, g et h à travers leurs dérivées partielles (9 en tout) à partir de seulement 3 équations différentielles du 1er ordre qui les relient.

• Ce système se résout par intégrations successives (comme pour le potentiel scalaire), mais n'a pas de réponse unique: mis à part les constantes, il y a en plus 6 $(= 9 - 3)$ choix à faire!

Cas particulier de champ et de potentiel

Cas particulier – Si $\vec{V} = V_z\,\vec{k}$ (c-à-d $V_x = V_y = 0$), avec

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0,$$

et on choisit $h = 0$ (ce qui fixe 3 conditions sur les 6 libres), il ne reste qu'un potentiel de la forme $\vec{U} = f\,\vec{\imath} + g\,\vec{\jmath}$ sousmis aux équations

$$(1)\quad \frac{\partial g}{\partial z} = 0, \quad (2)\quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (3)\quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = V_z.$$

- (1) et (2) assurent que f et g ne dépendent pas de z.
- Pour resoudre (3), il faut encore fixer arbitrairement $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ (2 conditions), plus l'une des deux dérivées $\frac{\partial f}{\partial y}$ ou $\frac{\partial g}{\partial x}$ (dernière condition libre).

Exemple: calcul de potentiel vectoriel

Exemple – Soit $\vec{V}(x,y,z) = (xy^2 - x^3y)\,\vec{k}$.

- D'abord, vérifions qu'il admet un potentiel vectoriel:

$$\operatorname{div}\vec{V}(x,y,z) = \frac{\partial(xy^2 - x^3y)}{\partial z} = 0.$$

- Puisque $D_{\vec{V}} = \mathbb{R}^3$ est contractile, par le Lemme de Poincaré $\vec{V}$ admet un potentiel vectoriel $\vec{U}$ défini sur tout $\mathbb{R}^3$.
- Cherchons $\vec{U}$ sous la forme

$$\vec{U}(x,y,z) = f(x,y)\,\vec{\imath} + g(x,y)\,\vec{\jmath}$$

($h = 0$ et donc $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z} = 0$) tel que

$$(3)\quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = xy^2 - x^3y.$$

Exemple (suite)

Solution 1: on choisit

$$\frac{\partial g}{\partial x} = xy^2 \quad \Rightarrow \quad g(x,y) = \int xy^2\,dx + G(y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + G(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3y \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = \int x^3y\,dy + F(x) = \frac{1}{2}x^3y^2 + F(x)$$

où $F(x)$ et $G(y)$ sont des fonctions arbitraires. On a donc

$$\vec{U}_1(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x^3y^2 + F(x)\right)\vec{\imath} + \left(\frac{1}{2}x^2y^2 + G(y)\right)\vec{\jmath}.$$

Solution 2: on choisit

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x,y) = \widetilde{G}(y)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} = x^3y - xy^2 \quad \Rightarrow \quad f(x,y) &= \int (x^3y - xy^2)\,dy + \widetilde{F}(x)\\ &= \tfrac{1}{2}x^3y^2 - \tfrac{1}{3}xy^3 + \widetilde{F}(x)\end{aligned}$$

où $\widetilde{F}(x)$ et $\widetilde{G}(y)$ sont des fonctions arbitraires. On a alors

$$\vec{U}_2(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x^3y^2 - \frac{1}{3}xy^3 + \widetilde{F}(x)\right)\vec{\imath} + \widetilde{G}(y)\vec{\jmath}.$$

Exemple (suite)

Transformation de jauge – La différence entre les deux solutions trouvées est donnée par le gradient d'une fonction: en posant toutes les fonctions F, G, $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$ égales à zéro,
on a

$$\begin{aligned}\vec{U}_1(x,y,z) - \vec{U}_2(x,y,z) &= \tfrac{1}{3}xy^3\,\vec{\imath} + \tfrac{1}{2}x^2y^2\,\vec{\jmath}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\tfrac{1}{6}x^2y^3 + c\right).\end{aligned}$$

Exercice: le champ magnétique

Énoncé – *Un courant d'intensité I qui passe dans un fil droit placé sur l'axe $\vec{k}$ engendre le* **champ magnétique** *(statique)*

$$\overrightarrow{B}(x,y,z) = \frac{\mu\, I}{2\pi}\Big(-\frac{y}{x^2+y^2}\,\vec{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{\jmath}\Big),$$

où μ est la permeabilité magnétique. *La force que $\overrightarrow{B}$ exerce sur une charge q placée en position (x,y,z) en mouvement avec vitesse $\vec{v}$ est donnée par*

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = q\,\vec{v} \wedge \overrightarrow{B}(x,y,z)$$

et s'appelle **force de Lorentz**.

1) *Trouver le domaine de définition de $\overrightarrow{B}$, son expression en coordonnées cylindriques et en dessiner quelques valeurs.*

Réponse –

- $D_{\vec{B}} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \neq 0\big\} \quad = \quad \mathbb{R}^3$ privé de l'axe $\vec{k}$

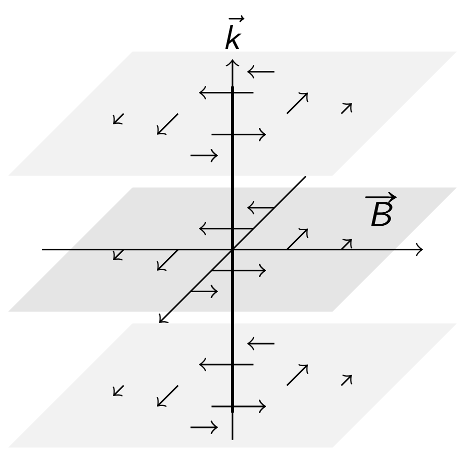
Donc $D_{\vec{B}}$ n'est pas simplement connexe (et pas contractile).

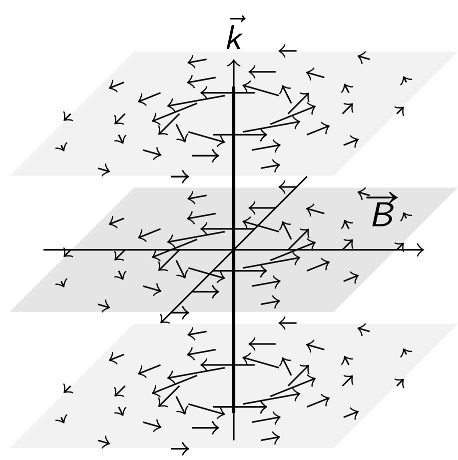
Exercice: le champ magnétique

- L'expression de $\overrightarrow{B}(x,y,z) = \frac{\mu\, I}{2\pi}\Big(-\frac{y}{x^2+y^2}\,\vec{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{\jmath}\Big)$ en coordonnées cylindriques est:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B}(\rho,\varphi,z) &= \frac{\mu\, I}{2\pi}\Big(-\frac{\rho\sin\varphi}{\rho^2}\,\vec{\imath} + \frac{\rho\cos\varphi}{\rho^2}\,\vec{\jmath}\Big)\\ &= \boxed{\frac{\mu\, I}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}}\,.\end{aligned}$$

- Le dessin de $\overrightarrow{B}$ est alors:





Exercice: le champ magnétique

2) *Le champ* $\vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \vec{e_\varphi}$ *est-il conservatif?*
Autrement dit, admet-il un potentiel scalaire?

Réponse –

• On a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\right) \vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{1}{\rho}\right) \vec{k} \right] = 0.$$

Par le lemme de Poincaré alors, on sait qu'un potentiel scalaire ϕ existe sur tout sous-ensemble $D \subset D_{\vec{B}}$ simplement connexe,
par exemple sur $D = \mathbb{R}^3$ privé du demi-plan $\varphi = 0$.

• Calculons ϕ tel que $\vec{B} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi$ sur un D simplement connexe:

$$(1) \quad -\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = 0 \qquad (2) \quad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{\rho} \qquad (3) \quad -\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

(1) et (3) disent que ϕ ne dépend pas de ρ et de z.

(2) s'écrit $\quad \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\phi(\varphi) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}(\varphi + \varphi_0)}$.

Exercice: le champ magnétique

• Or, le potentiel $\quad \phi(\varphi) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}(\varphi + \varphi_0) \quad$ est bien défini seulement si φ ne fait pas un tour complet autour de l'axe $\vec{k}$!

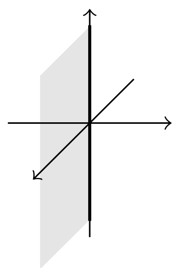
En effet, si φ peut faire un tour complet, au même point physique donné en coordonnées polaires par φ_0 ou $\varphi_0 + 2\pi$, on a deux valeurs distinctes du champ

$$\phi_0 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\varphi_0 \quad \text{et} \quad \phi_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}(\varphi_0 + 2\pi),$$

ce qui n'a pas de sens.

En conclusion, le champ $\vec{B}$ n'a pas de potentiel scalaire sur tout son domaine de définition.

• Par contre, le champ $\vec{B}$ admet bien un potentiel scalaire sur l'espace $\mathbb{R}^3$ privé d'un demi-plan contenant l'axe $\vec{k}$, par exemple le demi-plan xOz des x positifs.



Exercice: le champ magnétique

3) *Le champ $\vec{B}$ admet-il un potentiel vecteur?*

Réponse –

- On a $$\mathrm{div}\, \vec{B}(\rho,\varphi,z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0.$$

Par le lemme de Poincaré alors, on sait qu'un potentiel vectoriel $\vec{A}$ existe <u>sur tout sous-enemble $D \subset D_{\vec{B}}$ contractile,</u>
par exemple $D = \mathbb{R}^3$ privé du demi-plan $\varphi = 0$.

- Calculons $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ sur un D contractile. En générale:

$$\vec{A}(\rho,\varphi,z) = f(\rho,\varphi,z)\,\vec{e_\rho} + g(\rho,\varphi,z)\,\vec{e_\varphi} + h(\rho,\varphi,z)\,\vec{k}$$

est sousmis aux équations

$$(1)\quad \tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial h}{\partial\varphi} - \tfrac{\partial g}{\partial z} = 0 \qquad (2)\quad \tfrac{\partial f}{\partial z} - \tfrac{\partial h}{\partial\rho} = \tfrac{\mu_0 I}{2\pi}\,\tfrac{1}{\rho} \qquad (3)\quad \tfrac{1}{\rho}\left(\tfrac{\partial(\rho g)}{\partial\rho} - \tfrac{\partial f}{\partial\varphi}\right) = 0$$

et on a <u>six choix</u> à faire pour avoir une solution (plus des constantes).

Exercice: le champ magnétique

- On choisit $f = g = 0$ et $\frac{\partial h}{\partial z} = 0$, alors on a:

(1) $\quad \frac{\partial h}{\partial\varphi} = 0 \quad \Longrightarrow \quad h$ ne dépend pas de φ $\quad$ (choix: $\varphi_0 = 0$)

(2) $\quad \frac{\partial h}{\partial\rho} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{1}{\rho} \quad \Longrightarrow \quad h(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\rho$ $\quad$ (choix: $\rho_0 = 1$)

Avec ces choix, l'expression du **potentiel magnétique** $\vec{A}$ est

$$\boxed{\vec{A}(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\ln(\rho)\,\vec{k}}\ .$$

- Contrairement au potentiel scalaire ϕ, le potentiel magnétique $\vec{A}$ est bien défini partout sauf en $\rho = 0$:

$$D_{\vec{A}} = D_{\vec{B}}.$$

En conclusion, le champ magnétique $\vec{B}$ admet bien un potentiel vectoriel sur tout son domaine de définition!

Chapitre 5
Circulation et flux

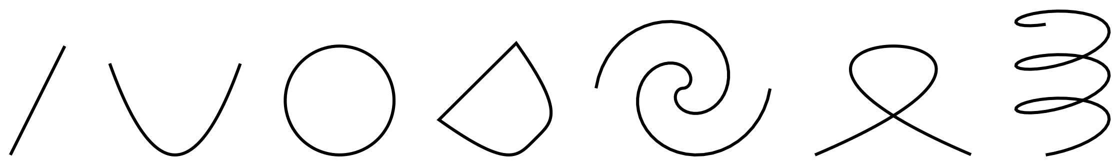
5.1 – Courbes

Dans cette section:

- Courbes données par deux équations
- Courbes paramétrées
- Élément de ligne

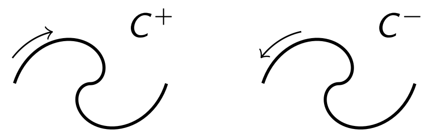
Courbes

Idée – Une **courbe** est une figure géométrique C de *dimension intrinsèque* égale à 1, comme une droite, une parabole, un cercle, ou l'union d'arcs de ce type:



• Une courbe est **plane** si elle est contenue dans un plan.

• Elle est **orientée**, et notée C^+, si on fixe un sens de parcour (il y en a toujours deux).
Dans ce cas, on note C^- la courbe orientée dans le sens opposé.



• Elle est **fermée** si en la parcourant en revient au point de départ, comme sur un cercle.

Courbes données par des équations

Définition – Comme sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$, une **courbe** est l'union d'ensembles donnés par <u>deux équations</u>:

$$C = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid F(\vec{x}) = 0 \text{ et } G(\vec{x}) = 0, \text{ plus restrictions sur } \vec{x} \right\}$$

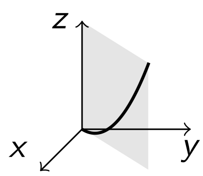
où $F, G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions réelles et les "restrictions" sont des <u>inégalités</u> dans les coordonnées.

Exemple –

• En coordonnées cartesiennes, les équations

$$x - y = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - z = 0,$$

avec la restriction $x \in [0,1]$, décrivent un arc de la parabole $z = x^2$ sur le plan $y = x$.



• En coordonnées cylindriques, le même arc de parabole est décrit par

$$\rho^2 - 2z = 0 \quad \text{et} \quad \varphi - \pi/4 = 0 \quad \text{avec } \rho \in [0,1].$$

Courbes paramétrées

Définition – Une **courbe paramétrée** est une courbe pour laquelle on donne aussi la *façon de la parcourir* en fonction d'un **paramètre** t (qui représente le *temps* en physique):

$$C = \left\{ \gamma(t) = \vec{x}(t) \;\middle|\; t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \right\},$$

où $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle dérivable qui s'appelle **paramétrisation** et denote souvent la courbe même.

L'**orientation** de γ est donné par le sens croissant de t.

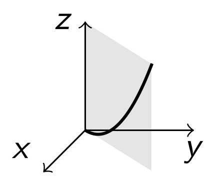
La courbe est **fermée** si $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$.

Paramétrisation des coordonnées –

- cartesiennes: $\boxed{\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))}$
- cylindriques: $\boxed{\gamma(t) = \rho(t)\ \vec{e_\rho}(t) + z(t)\ \vec{k}}$
- sphériques: $\boxed{\gamma(t) = r(t)\ \vec{e_r}(t)}$

Exemple: paramétrisation d'une courbe

Exemple – L'arc de parabole peut être paramétré comme suit:



- En coordonnées cartesiennes, on a $z = x^2$, $y = x$, et $x \in [0,1]$, alors on peut choisir

$$x(t) = t, \quad y(t) = t, \quad z(t) = t^2, \quad \text{avec } t \in [0,1]$$

et on obtient $\gamma(t) = (t, t, t^2)$, avec $t \in [0,1]$.

- En coordonnées cylindriques, on a $\rho^2 = 2z$, $\varphi = \pi/4$, et $\rho \in [0,1]$, alors on peut choisir:

$$\rho(t) = t \quad \varphi(t) = \pi/4, \quad z(t) = t^2/2, \quad \text{avec } t \in [0,1]$$

et on obtient $\gamma(t) = t\ \vec{e_\rho}(t) + t^2/2\ \vec{k}$, avec $t \in [0,1]$.

Vitesse et accéleration

Définition – Pour une courbe paramétrée $\gamma(t) = \vec{x}(t)$ on appelle:

- **vitesse**, le vecteur $\boxed{\dot\gamma(t) = \frac{d}{dt}\vec{x}(t)}$,

- **accéleration**, le vecteur $\boxed{\ddot\gamma(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t)}$.

Lemme – *Les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont constants, par contre:*

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_\rho &= \dot\varphi\,\vec{e_\varphi} \\ \dot{\vec{e}}_\varphi &= -\dot\varphi\,\vec{e_\rho} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_r &= \dot\varphi\,\vec{e_\varphi} + \dot\theta\,\vec{e_\theta} \\ \dot{\vec{e}}_\varphi &= -\dot\varphi\sin\theta\,\vec{e_r} - \dot\varphi\cos\theta\,\vec{e_\theta} \\ \dot{\vec{e}}_\theta &= -\dot\theta\,\vec{e_r} + \dot\varphi\cos\theta\,\vec{e_\varphi} \end{aligned}\right.}$$

Paramétrisation de la vitesse en coordonnées –

- cartesiennes: $\boxed{\dot\gamma(t) = \dot x(t)\,\vec{\imath} + \dot y(t)\,\vec{\jmath} + \dot z(t)\,\vec{k}}$

- cylindriques: $\boxed{\dot\gamma(t) = \dot\rho(t)\,\vec{e_\rho}\,(t) + \rho(t)\dot\varphi(t)\,\vec{e_\varphi}\,(t) + \dot z(t)\,\vec{k}}$

- sphériques: $\boxed{\dot\gamma(t) = \dot r(t)\,\vec{e_r}\,(t) + r(t)\dot\varphi(t)\,\vec{e_\varphi}\,(t) + r(t)\dot\theta(t)\,\vec{e_\theta}\,(t)}$

Courbes régulières

Définition – La courbe $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^3$ est **régulière** si la vitesse ne s'annulle jamais, c'est-à-dire si

$$\dot\gamma(t) \neq \vec{0} \quad (\text{ou bien} \quad \|\dot\gamma(t)\| \neq 0) \quad \text{pour tout } t \in [t_0, t_1].$$

Dans ce cas, la vitesse est un vecteur tangent à la courbe, et on appelle:

- **élément de ligne**, le vecteur $\boxed{\vec{d\ell} = \dot\gamma(t)\ dt}$;

- **abscisse curviligne**, la primitive de $\|\dot\gamma(t)\|$, notée $s = s(t)$, donc on a $\boxed{s'(t) = \|\dot\gamma(t)\|}$;

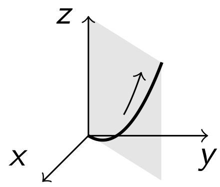
- **élément d'arc**, la différentielle $\boxed{ds = \|\dot\gamma(t)\|\ dt}$;

- **longueur**, l'intégrale $\boxed{L_{t_0}^{t_1}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_{s(t_0)}^{s(t_1)} ds}$.

Exemples de courbes paramétrées

Exemples –

- **Parabole:** $x = y,\ z = x^2$ et $x \in [0,1]$



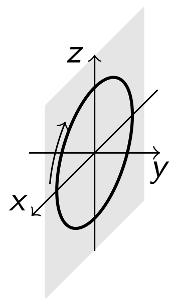
$\gamma(t) = (t, t, t^2)$ avec $t \in [0,1]$

$\dot\gamma(t) = (1,1,2t) = \vec\imath + \vec\jmath + 2t\,\vec k$

$\|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{2+4t^2} \neq 0 \implies \gamma$ est régulière

$\overrightarrow{d\ell} = (1,1,2t)\ dt = dt\ \vec\imath + dt\ \vec\jmath + 2t\ dt\ \vec k\,.$

- **Ellipse:** $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ et $y = 0$



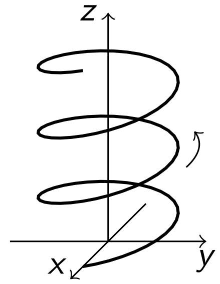
$\gamma(t) = (3\cos t, 0, 2\sin t),\quad t \in [0, 2\pi]$

$\dot\gamma(t) = (-3\sin t, 0, 2\cos t) \neq \vec 0$

$\overrightarrow{d\ell} = (-3\sin t, 0, 2\cos t)\ dt = -3\sin t\ dt\ \vec\imath + 2\cos t\ dt\ \vec k\,.$

Exemples de courbes paramétrées

- **Hélice circulaire:**



$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ avec $t \in [0, 6\pi]$

$\implies \quad x^2 + y^2 = 1, \quad \frac{y}{x} = \tan z \quad (\text{si } x \neq 0)$

$\dot\gamma(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \neq \vec 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma$ rég.

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{d\ell} = (-\sin t\,\vec\imath + \cos t\,\vec\jmath + \vec k\,)\,dt$

$\|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt 2$

$\Rightarrow \quad L_0^{2\pi}(\gamma) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt 2\,dt = 2\sqrt 2\pi$

En cylindriques: $\rho(t) = 1,\quad \varphi(t) = t,\quad z(t) = t$

$\Rightarrow \quad \gamma(t) = \rho(t)\,\vec e_\rho + z(t)\,\vec k \quad = \vec e_\rho + t\,\vec k$

$\dot\gamma(t) = \dot\rho(t)\,\vec e_\rho + \rho(t)\dot\varphi(t)\,\vec e_\varphi + \dot z(t)\,\vec k \quad = \vec e_\varphi + \vec k$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{d\ell} = (\vec e_\varphi + \vec k\,)\,dt$

5.2 – Circulation

Dans cette section:

- Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe
- Circulation d'un champ de gradient

Circulation et intégrale curviligne

Définition – Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et soit C^+ une courbe orientée dans le domaine de $\overrightarrow{V}$, paramétrée par $\gamma\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^3$. On appelle **circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de C^+** l'**intégrale curviligne**

$$\boxed{\int_{C^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{V}\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot{\gamma}(t)\ dt}$$

où $\overrightarrow{V}\big(\gamma(t)\big)$ indique que le champ $\overrightarrow{V}$ est évalué sur les points de la courbe et $\cdot$ indique le produit scalaire entre vecteurs.

Notation – Si C^+ est une courbe <u>fermée</u>, la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de C^+ s'écrit

$$\boxed{\oint_{C^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell}}$$

Proposition – *Si C^- est orientée dans le <u>sens opposé</u> à C^+, on a*

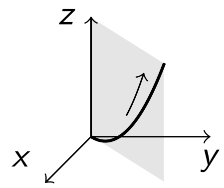
$$\int_{C^-} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = -\int_{C^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell}.$$

Exercices

Enoncé – *Calculer la circulation des champs suivants, le long des courbes indiquées.*

- *Champ* $\vec{F}(x,y,z) = z\,\vec{\imath} - y\,\vec{\jmath} + x\,\vec{k}$

  Parabole $\gamma(t) = (t, t, t^2), \quad t \in [0,1]$



Réponse – On a

$$\vec{F}(\gamma(t)) = t^2\,\vec{\imath} - t\,\vec{\jmath} + t\,\vec{k}$$
$$\dot{\gamma}(t) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2t\,\vec{k}.$$

La circulation de $\vec{F}$ le long de γ est donc

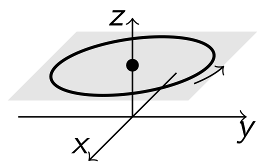
$$\int_{C_1^+} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = \int_0^1 \left(t^2 - t + 2t^2\right)\,dt = \int_0^1 \left(3t^2 - t\right)\,dt = \left[t^3 - \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exercices

- *Champ* $\vec{V}(\rho,\varphi,z) = \varphi\,\vec{e_\rho} + z\,\vec{e_\varphi} + \rho\,\vec{k}$

  Cercle $x^2 + y^2 = 9, \quad z = 2$

  orienté en sens antihoraire



Réponse – On paramétrise $\gamma(t) = \rho(t)\,\vec{e_\rho} + z(t)\,\vec{k}$ avec

$$\rho(t) = 3, \quad \varphi(t) = t \quad \text{et} \quad z(t) = 2, \quad t \in [0, 2\pi].$$

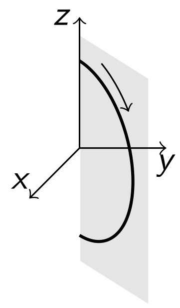
On a alors

$$\vec{V}(\gamma(t)) = t\,\vec{e_\rho} + 2\,\vec{e_\varphi} + 3\,\vec{k}$$
$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\rho}(t)\,\vec{e_\rho} + \rho(t)\dot{\varphi}(t)\,\vec{e_\varphi} + \dot{z}(t)\,\vec{k} = 3\,\vec{e_\varphi}$$

et la circulation de $\vec{V}$ le long de γ est donc

$$\int_\gamma \vec{V} \cdot \vec{d\ell} = \int_0^{2\pi} 6\,dt = 12\pi.$$

Exercices



- *Champ* $\quad \vec{U}(r,\varphi,\theta) = \varphi\ \vec{e_r}\ + \sin\theta\ \vec{e_\varphi}\ + \rho\ \vec{e_\theta}$

  Demi-cercle $\quad x^2+y^2+z^2=4, \quad y=x\geqslant 0$
  orienté en sens horaire

Réponse – On paramétrise $\quad \gamma(t) = r(t)\ \vec{e_r} \quad$ avec

$$r(t)=2, \quad \varphi(t)=\frac{\pi}{4}, \quad \theta(t)=t, \quad t\in[0,\pi].$$

On a alors

$$\vec{U}(\gamma(t)) = \pi/4\ \vec{e_r}\ + \sin t\ \vec{e_\varphi}\ + 2\ \vec{e_\theta}$$
$$\dot\gamma(t) = \dot r(t)\ \vec{e_r}\ + r(t)\dot\varphi(t)\ \vec{e_\varphi}\ + r(t)\dot\theta(t)\ \vec{e_\theta} \qquad = 2\ \vec{e_\theta}$$

et la circulation de $\vec{U}$ le long de γ est donc

$$\int_\gamma \vec{U}\cdot\vec{d\ell} = \int_0^\pi 4\ dt = 4\pi.$$

Travail d'une force

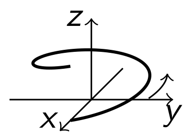
Définition – Soit $\vec{F}$ un champ de force de $\mathbb{R}^3$ qui déplace un corps le long d'un trajet paramétré par la courbe $\gamma\colon [t_0,t_1]\to\mathbb{R}^3$.

Le **travail de la force** $\vec{F}$ est l'énergie W fournie pour accomplir le déplacement et est donné par la circulation de $\vec{F}$ le long de γ.

$$\boxed{W = \int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{d\ell}}$$

Exemple – Calculons le travail effectué par la force

$$\vec{F}(x,y,z) = z\ \vec{\imath} - y\ \vec{\jmath} + x\ \vec{k}$$



pour déplacer un objet le long de l'arc d'hélice

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t\in[0,2\pi].$$

On a

$$\vec{F}(\gamma(t)) = t\ \vec{\imath} - \sin t\ \vec{\jmath} + \cos t\ \vec{k}$$
$$\dot\gamma(t) = -\sin t\ \vec{\imath} + \cos t\ \vec{\jmath} + \vec{k},$$

donc

$$W = \int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{d\ell} = \int_0^{2\pi}\Big(-t\ \sin t - \sin t\ \cos t + \cos t\Big)\ dt$$
$$= \Big[\ t\ \cos t\ \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos t\ dt - \Big[\ \frac{1}{2}\sin^2 t\ \Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos t\ dt = 2\pi.$$

Circulation d'un champ de gradient

Théorème – *Soit $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ un champ de gradient, de domaine D_ϕ. Alors:*

- *La circulation de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ le long d'une courbe C^+ quelconque qui joint deux points A et B contenus dans D_ϕ ne dépend pas de la courbe mais seulement des deux points:*

$$\int_{C^+} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi \cdot \overrightarrow{d\ell} = \phi(B) - \phi(A).$$

- *La circulation de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ le long d'une courbe <u>fermée</u> C^+ est nulle:*

$$\oint_{C^+} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0.$$

La première assertion se demontre par calcul direct.
La deuxième est une conséquence de la première, ou bien un corollaire du théorème de Gauss traité à la fin de ce chapitre.

Exercice

Enoncé – *Considerons le champ scalaire*

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{y(z^2-x^2)}},$$

sur le domaine $\quad D = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0,\ z > x > 0\,\}$.
Calculer le travail de la force conservative $\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ le long d'une hélice C^+ contenue dans D qui joint le point $A = (0,1,2)$ au point $B = (3,4,5)$.

Réponse – Le travail de $\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ le long de C^+ vaut:

$$\begin{aligned} W = -\int_{C^+} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi \cdot \overrightarrow{d\ell} \quad &= \phi(0,1,2) - \phi(3,4,5) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{4-0}} - \tfrac{1}{\sqrt{4(25-9)}} \\ &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2\cdot 4} = \tfrac{3}{8}. \end{aligned}$$

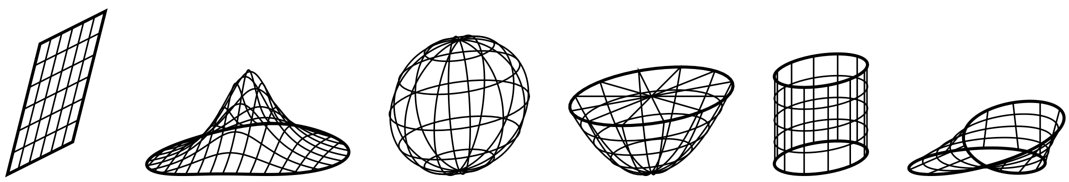
5.3 – Surfaces

Dans cette section:

- Surfaces données par une équation
- Surfaces paramétrées
- Vecteur normale et élément de surface

Surfaces

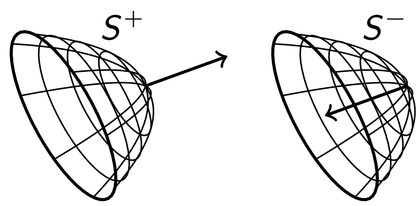
Idée – Une **surface** est une figure géométrique S de *dimension intrinsèque* égale à 2, comme un plan, un disque, un paraboloïde, une sphère, un cylindre, la bande de Moebius, ou leur union:



• Une surface est **plane** si elle est contenue dans un plan.

• Elle est **orientable** si on peut distinguer deux cotés. Ceci n'est pas toujours possible, par exemple pour la bande de Moebius.

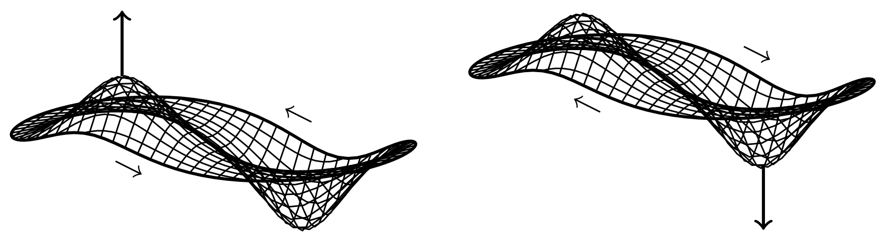
• Une surface orientable est **orientée**, et notée S^+, si on choisi un sens de traversée, indiqué par un vecteur sortant. Dans ce cas, on note S^- la surface orientée dans le sens opposé.



Bord des surfaces et surfaces fermées

- Le **bord** d'une surface S est la courbe ∂S qui délimite la surface, par exemple le cercle qui entoure un disque, ou les deux cercles qui délimitent un cylindre.

- Le bord d'une surface orientée est automatiquement orienté de telle sorte qu'en le parcourant débout (direction sortante de S), la surface se trouve sur la gauche.



- Une surface S est **fermée** si on peut distinguer son intérieur de son extérieur, comme pour la sphère. Cela arrive si son bord est vide: $\partial S = \varnothing$.

- Une surface fermée S delimite un solide $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, comme la sphère qui entoure la boule unitaire. On dit alors que S **est le bord de** Ω, et on écrit: $S = \partial\Omega$.

Surfaces données par une équation

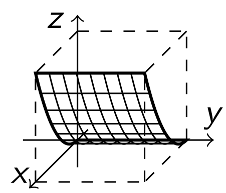
Définition – Comme sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$, une **surface** est l'union d'ensembles donnés par une équation:

$$S = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid F(\vec{x}) = 0 \quad \text{plus restrictions sur les variables} \right\}$$

où $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle et les "restrictions" sont des inégalités dans les coordonnées.

Proposition – *Le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une surface d'équation* $z = f(x,y)$, *avec* $(x,y) \in D_f$.

Exemple – $z = x^2, \quad x, y \in [0,1]$
décrit un **cylindre parabolique**,
d'axe $\vec{Oy}$.
Dans ce cas, S est non fermée et son bord ∂S est l'union de quatre courbes.



Surfaces paramétrées

Définition – Une **surface paramétrée** est une surface où les points sont décrits par deux **paramètres** indépendants u et v:

$$S = \Big\{ f(u,v) = \vec{x}(u,v) \mid u \in [u_0,u_1],\ v \in [v_0,v_1] \Big\},$$

où $f : [u_0,u_1] \times [v_0,v_1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle différentiable qui s'appelle **paramétrisation** de la surface.

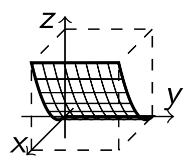
En coord. cartesiennes: $\boxed{f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))}$

Exemples –

- **Cylindre parabolique**: $z = x^2, \quad x, y \in [0,1]$

si on pose $y = u$, $x = v$ et $z = v^2$, on a

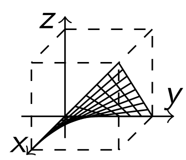
$$f(u,v) = (v, u, v^2), \quad u, v \in [0,1]$$



- **Hyperboloïde**: $z = xy, \quad x, y \in [0,1]$

si on pose $x = u$, $y = v$ et $z = uv$, on a

$$f(u,v) = (u, v, uv), \quad u, v \in [0,1]$$



Surfaces regulières et vecteur normal

Définition – Une surface S paramétrée par $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est **regulière** au point $f(u,v)$ si le

- **vecteur normal** $\boxed{\vec{n}(u,v) = \dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}}$

est bien défini et non nul. Dans ce cas, S est <u>orientée</u> par $\vec{n}$, et on appelle:

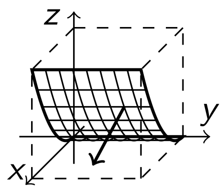
- **élément de surface**, le vecteur $\boxed{\overrightarrow{dS} = \vec{n}(u,v)\ du\ dv}$,
- **élément d'aire**, le scalaire $\boxed{dA = \|\vec{n}(u,v)\|\ du\ dv}$,
- **aire de la surface**, l'intégrale double

$$\boxed{\mathrm{Aire}\,(S) = \iint_{U\times V} \|\vec{n}(u,v)\|\ du\ dv = \iint_{U\times V} dA}.$$

Exemples de surfaces paramétrées

Exemples –

- **Cylindre parabolique**: $z = x^2$, $x, y \in [0,1]$

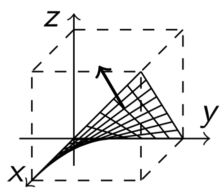


$$f(u,v) = (v, u, v^2), \quad u, v \in [0,1]$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{vecteur orienté vers le bas}$$

$$\overrightarrow{dS} = 2v\ du\ dv\ \vec{\imath} - du\ dv\ \vec{k}$$

- **Hyperboloïde**: $z = xy, \quad x, y \in [0,1]$



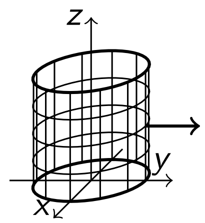
$$f(u,v) = (u, v, uv), \quad u, v \in [0,1]$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{vecteur orienté vers le haut}$$

$$\overrightarrow{dS} = -v\ du\ dv\ \vec{\imath} - u\ du\ dv\ \vec{\jmath} + du\ dv\ \vec{k}$$

Exemples de surfaces paramétrées

- **Cylindre circulaire**: $x^2 + y^2 = R^2, \quad z \in [0, H]$



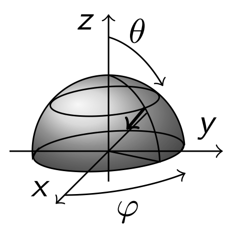
en coord. cylindriques: $\rho = R$, donc

$$f(\varphi, z) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$$

avec $\varphi \in [0, 2\pi[$ et $z \in [0, H]$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{vecteur sortant}$$

- **Démi-sphère**: $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geqslant 0$



en coord. sphériques: $r = 1$, donc

$$f(\varphi, \theta) = \big(\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta\big)$$

avec $\varphi \in [0, 2\pi]$ et $\theta \in [0, \pi/2]$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin^2\theta \\ -\sin\varphi\sin^2\theta \\ -\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{vecteur entrant}$$

5.4 – Flux, Stokes et Gauss

Dans cette section:

- Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface
- Théorème de Stokes-Ampère
- Cas particuliers, Théorème de Green-Riemann
- Théorème de Gauss

Flux et intégrales de surface

Définition – Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et S^+ une surface contenue dans le domaine de $\overrightarrow{V}$, paramétrée par $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$, et orientée par le vecteur normal $\vec{n}$. On appelle **flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S^+** l'**intégrale de surface**

$$\boxed{\iint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{U\times V} \overrightarrow{V}\Big(f(u,v)\Big) \cdot \vec{n}(u,v)\ du\ dv},$$

où $\overrightarrow{V}\big(f(u,v)\big)$ indique que le champ $\overrightarrow{V}$ est évalué sur les points de la surface et $\cdot$ est le produit scalaire de vecteurs.

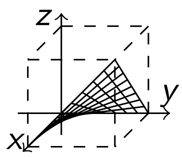
Notation – Si S^+ une surface <u>fermée</u>, le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S^+ s'écrit $\boxed{\oint\!\!\oint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\ell}}$.

Proposition – *Si S^- est orientée dans le <u>sens opposé</u> à S^+, on a*

$$\iint_{S^-} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS} = -\iint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS}.$$

Exercice

Enoncé – *Calculer le flux des champs suivants, à travers les surfaces indiquées.*



- *Champ* $\vec{V}(x,y,z) = x\,\vec{\imath} + z\,\vec{\jmath} + y\,\vec{k}$

  Hyperboloïde $f(u,v) = (u,v,uv), \quad u,v \in [0,1]$

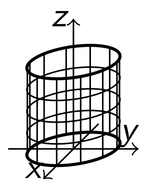
Réponse – On a

$$\vec{V}(f(u,v)) = u\,\vec{\imath} + uv\,\vec{\jmath} + v\,\vec{k}$$
$$\vec{n}(u,v) = -v\,\vec{\imath} - u\,\vec{\jmath} + \vec{k}$$

donc le flux de $\vec{V}$ à travers S^+ vaut

$$\iint_{S^+} \vec{V}\cdot\vec{dS} = \iint_{[0,1]\times[0,1]} (-uv - u^2v + v)\ du\ dv$$
$$= \int_0^1 (-u - u^2 + 1)\ du \int_0^1 v\ dv$$
$$= \Big[-\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}u^3 + u\Big]_0^1 \Big[\frac{1}{2}v^2\Big]_0^1 = \Big(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\Big)\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

Exercice



- *Champ* $\vec{V}(x,y,z) = xz\,\vec{\imath} - yz\,\vec{\jmath}$

  Cylindre $f(\varphi,z) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z),$

  $\varphi \in [0,2\pi[, \quad z \in [0,H]$

Réponse – On a

$$\vec{V}(f(\varphi,z)) = R\cos\varphi z\,\vec{\imath} - R\sin\varphi z\,\vec{\jmath}$$
$$\vec{n}(\varphi,z) = R\cos\varphi\,\vec{\imath} + R\sin\varphi\,\vec{\jmath}$$

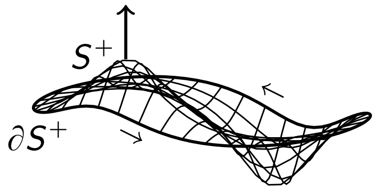
donc le flux de $\vec{V}$ à travers S^+ vaut

$$\iint_{S^+} \vec{V}\cdot\vec{dS} = \iint_{[0,2\pi[\times[0,H]} R^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)z\ d\varphi\ dz$$
$$= R^2 \int_0^{2\pi} \cos(2\varphi)\ d\varphi \int_0^H z\ dz$$
$$= R^2\Big[\frac{1}{2}\sin(2\varphi)\Big]_0^{2\pi}\Big[\frac{1}{2}z^2\Big]_0^H = 0$$

Théorème de Stokes-Ampère

Théorème – *Si* $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$ *et* S^+ *est une surface orientée* *<u>qualconque</u>, avec bord* ∂S^+*, on a:*

$$\boxed{\iint_{S^+} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U} \cdot \vec{dS} = \oint_{\partial S^+} \vec{U} \cdot \vec{d\ell}}$$



Autrement dit:

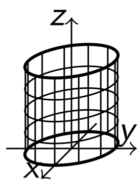
Le flux d'un champ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$ *à travers une surface* S^+ *est égal à la circulation de* $\vec{U}$ *le long de son bord* ∂S^+*.*

Exemple

Exemple – Champ $\vec{V}(x,y,z) = xz\,\vec{\imath} - yz\,\vec{\jmath}$

Cylindre $f(\varphi, z) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$,

$\varphi \in [0, 2\pi[, \quad z \in [0, H]$



- On remarque que $\mathrm{div}\,\vec{V}(x,y,z) = z - z = 0$.

Puisque $D_{\vec{V}} = \mathbb{R}^3$ est contractile, $\vec{V}$ a un potentiel vectoriel $\vec{U}$.

Après calculs, on trouve: $\vec{U}(x,y,z) = xyz\,\vec{k}$.

- On applique alors le théorème de Stokes:

$$\iint_{S^+} \vec{V} \cdot \vec{dS} = \iint_{S^+} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U} \cdot \vec{dS} = \oint_{\partial S^+} \vec{U} \cdot \vec{d\ell}.$$

- Le bord de S^+ est composé de deux cercles orientés

$$\alpha(t) = (R\cos t, R\sin t, 0) \quad \text{et} \quad \beta(t) = (R\cos t, -R\sin t, H),$$

avec

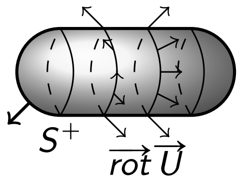
$$\dot\alpha(t) = -R\sin t\,\vec{\imath} + R\cos t\,\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \dot\beta(t) = -R\sin t\,\vec{\imath} - R\cos t\,\vec{\jmath}.$$

- On alors $\vec{U} \cdot \dot\alpha(t) = 0$ et $\vec{U} \cdot \dot\beta(t) = 0$, donc $\displaystyle\iint_{S^+} \vec{V} \cdot \vec{dS} = 0$.

Théorème de Green-Riemann

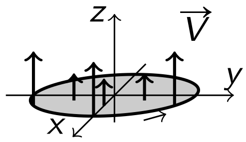
Cas particuliers du théorème de Stokes –

- Si S^+ est une surface fermée, on a:



$$\boxed{\oiint_{S^+} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{dS} = 0}$$

- Si S^+ est une surface plane dans le plan xOy,
  et $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U}$ est orthogonal à S,
  le champ $\overrightarrow{U}$ ne dépend pas de z et on a:



$$\overrightarrow{U}(x,y) = P(x,y)\,\vec{\imath} + Q(x,y)\,\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

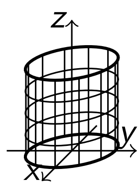
Dans ce cas: **Théorème de Green-Riemann:**

$$\boxed{\iint_{S^+}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \oint_{\partial S^+}\Big(P\,dx + Q\,dy\Big)}\,.$$

Exemple

Exemple – Champ $\overrightarrow{V}(x,y,z) = xz\,\vec{\imath} - yz\,\vec{\jmath}$

Cylindre précédent fermé par les deux disques à hauteur $z = 0$ et $z = H$.



- Puisque $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U}$ avec $\overrightarrow{U}(x,y,z) = xyz\,\vec{k}$,

et $\partial S^+ = \varnothing$, on a:

$$\oiint_{S^+}\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dS} = \oiint_{S^+}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{dS}$$
$$= \int_{\partial S^+}\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{d\ell} = 0.$$

Théorème de Gauss-Ostrogradski

Théorème – Si $\vec{V}$ est un champ de vecteurs quelconque et S^+ est une surface orientée fermée, qui delimite un espace borné Ω, c'est-à-dire que $\partial\Omega = S$, on a:

$$\boxed{\iint_{S^+=\partial\Omega} \vec{V}\cdot\vec{dS} = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\,\vec{V}\; dx\; dy\; dz}\,.$$

Exemple – Si $\vec{V}$ est un champ avec $\mathrm{div}\,\vec{V} = 5$, et S est la coquille d'un oeuf Ω de volume 4, le flux de $\vec{V}$ entrant dans l'oeuf est:

$$\oiint_{S^+} \vec{V}\cdot\vec{dS} = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\,\vec{V}\; dx\; dy\; dz$$
$$= 5\iiint_{\Omega} dx\; dy\; dz = 5\ \mathrm{Vol}\,(\Omega) = 20.$$

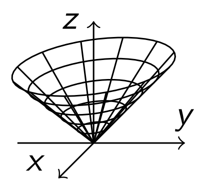
Exercice

Enoncé – *Calculer le flux du champ de vecteurs*

$$\vec{V}(x,y,z) = x^2\,\vec{\imath} + y^2\,\vec{\jmath} + z^2\,\vec{k}$$

à travers le cône S^+ d'équation $z^2 = x^2 + y^2$, $z \in [0,3]$, paramétré par

$$f(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, \rho)$$
$$\rho \in [0,3], \varphi \in [0,2\pi].$$



Réponse –

- D'abord, on observe que la surface S n'est pas fermée, car son bord ∂S est le cercle $x^2 + y^2 = 9$ et $z = 3$.

- Ensuite, on observe que $\mathrm{div}\,\vec{V}(x,y,z) = 2x + 2y + 2z \neq 0$.

- Alors on ne peut appliquer aucun théorème, il faut calculer le flux de $\vec{V}$ à travers S^+ en utilisant la définition.

Exercice (suite)

- Pour: $\vec{V}(x,y,z) = x^2\,\vec{\imath} + y^2\,\vec{\jmath} + z^2\,\vec{k}$

et S^+: $f(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, \rho)$, $\rho \in [0,3]$, $\varphi \in [0,2\pi]$,

on a:

$$\vec{V}(f(\rho,\varphi)) = \rho^2\cos^2\varphi\,\vec{\imath} + \rho^2\sin^2\varphi\,\vec{\jmath} + \rho^2\,\vec{k},$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-\rho\sin\varphi\\ \rho\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\rho\cos\varphi\\ -\rho\sin\varphi\\ \rho\end{pmatrix}.$$

- Le flux est alors:

$$\iint_{S^+} \vec{V}\cdot\vec{dS} = \iint_{[0,3]\times[0,2\pi]} \left(-\rho^3\cos^3\varphi - \rho^3\sin^3\varphi + \rho^3\right)\,d\rho\,d\varphi$$
$$= \int_0^3 \rho^3\,d\rho \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^3\varphi - \sin^3\varphi\right)\,d\varphi$$
$$= \frac{1}{4}3^4\,2\pi = \frac{81\pi}{2},$$

parce que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^3\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi = 0.$

Exercice

Exercice – *Calculer le flux du même champ de vecteurs*

$$\vec{V}(x,y,z) = x^2\,\vec{\imath} + y^2\,\vec{\jmath} + z^2\,\vec{k}$$

à travers la surface fermée S^+ formée du cône précédent $z^2 = x^2 + y^2$, $z \in [0,3]$ et du disque $x^2 + y^2 \leqslant 9$, $z = 3$, orientée par les vecteurs normaux sortants.

Réponse – Puisque la surface est fermée, on peut utiliser le théorème de Gauss:

$$\oiint_{S^+} \vec{V}\cdot\vec{dS} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{V}\,dx\,dy\,dz,$$

où Ω est le solide entouré par S, donc

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant z^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 3\right\},$$

et

$$\operatorname{div}\vec{V}(x,y,z) = 2x + 2y + 2z.$$

Exercice (suite)

On a alors, en coordonnées cylindriques,

$$\begin{aligned}
\oiint_{S^+} \vec{V} \cdot \vec{dS} &= 2 \iiint_{\Omega} (x+y+z)\ dx\ dy\ dz \\
&= 2 \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^z \Big(\rho^2(\cos\varphi + \sin\varphi) + \rho z\Big) d\rho \\
&= 2 \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} \Big[\frac{1}{3}\rho^3(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{1}{2}\rho^2 z\Big]_{\rho=0}^{\rho=z} d\varphi \\
&= 2 \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} \Big(\frac{1}{3}z^3(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{1}{2}z^3\Big) d\varphi \\
&= 2 \int_0^3 dz \Big[\frac{1}{3}z^3(\sin\varphi - \cos\varphi) + \frac{1}{2}z^3\varphi\Big]_0^{2\pi} \\
&= 2 \int_0^3 \frac{1}{2}z^3\ 2\pi\ dz \\
&= 2\pi \frac{1}{4} 3^4 = \frac{81\pi}{2}
\end{aligned}$$

Exercice

Exercice – *Calculer le flux du rotationnel de*

$$\vec{V}(x,y,z) = x^2\,\vec{\imath} + y^2\,\vec{\jmath} + z^2\,\vec{k}$$

à travers le cône S^+ *d'équation* $z^2 = x^2 + y^2$, $z \in [0,3]$, *paramétré par*

$$f(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, \rho), \quad \rho \in [0,3], \varphi \in [0,2\pi].$$

Réponse – Pour trouver ce flux on utilise le théorème de Stokes:

$$\iint_{S^+} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} \cdot \vec{dS} = \oint_{\partial S^+} \vec{V} \cdot \vec{d\ell}$$

et on n'a pas besoin de calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$.

Le bord ∂S^+ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 9$, $z = 3$, orienté dans le sens horaire, qu'on paramétrise par

$$\gamma(t) = (3\cos t, -3\sin t, 3), \quad t \in [0, 2\pi[.$$

Exercice (suite)

On a alors: $\gamma'(t) = -3\sin t\,\vec{\imath} - 3\cos t\,\vec{\jmath}$ et

$$\overrightarrow{V}(\gamma(t)) = 9\cos^2 t\,\vec{\imath} + 9\sin^2 t\,\vec{\jmath} + 9\,\vec{k}.$$

Le flux de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}$ à travers le cône S^+ est donc:

$$\begin{aligned}
\iint_{S^+} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dS} &= \oint_{\partial S^+} \overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{d\ell} \\
&= \int_0^{2\pi} \overrightarrow{V}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\;dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(-27\cos^2 t\sin t - 27\sin^2 t\cos t + 0\big)\;dt \\
&= 27\Big[\frac{1}{3}\cos^3 t - \frac{1}{3}\sin^3 t\Big]_0^{2\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

FIN DU COURS !

BONNE CONTINUATION !