

**EXAMEN FINAL**  
**TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE**  
**LICENCE 1ère ANNÉE**

**Jeudi 1 juin 2006. Durée de l'épreuve : 2h**

Il est interdit d'utiliser des calculatrices.  
Il est admis de consulter le polycopié ou des notes personnelles.

**Exercice 1 (Formule de Taylor).** Montrer que pour tout  $x \in \mathbf{R}$  on a

$$\left| \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^4}{24},$$

en utilisant le développement de Taylor de la fonction  $\cos x$  autour de  $x = 0$ .

**Exercice 2 (Calcul d'intégrale).** Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3 + 1} dx,$$

en remarquant que  $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ .

**Exercice 3 (Équation différentielle du 1er ordre).** Trouver l'unique solution  $y$  de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2xy(x) = \frac{e^{x^2}}{\cos^2 x}$$

qui vérifie  $y(0) = 1$ .

**Exercice 4 (Équation différentielle du 2ème ordre).** Résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \sinh x.$$