

EXAMEN PARTIEL
TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE
LICENCE 1ère ANNÉE

Mardi 11 avril 2006. Durée de l'épreuve : 1h30

Il est interdit d'utiliser des calculatrices.

Il est admis de consulter le polycopié ou des notes personnelles.

Exercice 1. Trouver les solutions complexes de

$$2z^2 - (2 + 3i)z - 1 + i = 0$$

et les dessiner sur le plan complexe.

Exercice 2. Calculer les limites suivantes (éventuellement en utilisant le Théorème de L'Hôpital)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x^2}{x^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sinh x)}{\sqrt{\sinh x}}$

Exercice 3. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 1 & \text{si } x < 0, \\ 2 - \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- 1) La fonction f est-elle continue sur \mathbf{R} ?
- 2) En utilisant le Théorème des Valeurs Intermédiaires, montrer que f a au moins deux zéros compris entre -1 et 8 .
- 3) La fonction f est-elle dérivable sur \mathbf{R} ?

Exercice 4. Etudier la fonction

$$f(x) = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right) + \arccos(x)$$

et dessiner son graphe. Plus précisément,

- 1) Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- 2) La fonction f est-elle continue sur D_f ?
- 3) Déterminer l'ensemble $D'_f \subset D_f$ où f est dérivable, et calculer la fonction dérivée f' .
- 4) Trouver deux constantes A et B telles que

$$\begin{aligned} f(x) &= A, & \text{pour } x > 0 \text{ dans } D'_f, \\ f(x) &= 2 \arccos(x) + B, & \text{pour } x < 0 \text{ dans } D'_f. \end{aligned}$$