Interrogation n. 10 – Corrigé

Barème – Moitié points pour la méthode et moitié pour les calculs.

Exercice 1 (4 points) – Trouver, s'ils existent, les extrema locaux (minimum et maximum locaux) de la fonction

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Réponse – Les *extrema locaux* sont les points de *minimum* et *maximum locaux*. Puisque la fonction f est dérivable au moins deux fois, pour les trouver on procède en deux étapes.

1) Si les extrema existent, ils annullent forcement la dérivée f', alors on calcule f' et on cherche les points où elle s'annulle (ces points s'appellent *points critiques*). Puisque

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2),$$

on a :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{soit} \quad x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \\ \\ \text{soit} \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

En conclusion, la fonction f a deux points critiques, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

2) Pour savoir si les deux points critiques sont des extrema, on a deux méthodes possibles. Supposons que a soit un point critique ($f'(a) = 0$). Alors :

- Soit on établit le tableau de variation de f, et on applique le critère suivant :
  – Si f est décroissant pour $x < a$ et f est croissant pour $x > a$, alors a est un minimum local.
  – Si f est croissant pour $x < a$ et f est décroissant pour $x > a$, alors a est un maximum local.
- Soit on calcule la valeur $f''(a)$, et on applique le critère suivant :
  – Si $f''(a) > 0$, alors a est un minimum local.
  – Si $f''(a) < 0$, alors a est un maximum local.

Dans notre cas, appliquons par exemple la deuxième méthode. Puisque

$$f''(x) = 12x - 18 = 6(2x - 3),$$

on a :

$$f''(1) = 6(2-3) = -6 < 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 1 \text{ est un maximum local,}$$

et

$$f''(2) = 6(4-3) = 6 > 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 2 \text{ est un minimum local.}$$

En conclusion, la fonction f a deux extrema locaux, un maximum local en 1 et un minimum local en 2.

Exercice 2 (3+3 points) –

a) Écrire la partie principale du développement de Taylor à l'ordre 2 de la fonction

$$f(x) = e^{3x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

au point $x_0 = 0$.

b) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$e^{3x} > 1 + 3x \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Réponse –

a) Rappellons la *formule de Taylor à l'ordre* 2 *au point* a pour une fonction f dérivable au moins deux fois :

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)\,(x-a)^2 + \text{reste},$$

où le "reste" est une fonction $o\big((x-a)^2\big)$ qui tend vers 0 plus vite que $(x-a)^2$, pour $x \to a$.
N.B. Si f est dérivable au moins trois fois, il existe une valeur c comprise entre a et x telle que

$$\text{reste} = \frac{1}{3!} f'''(c)\,(x-a)^3 \qquad \textit{(formule de Taylor-Lagrange).}$$

Dans notre cas, pour la fonction $f(x) = e^{3x}$ et $a = 0$, on a donc :

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^{3x} & f(0) = e^0 = 1 \\ f'(x) = 3e^{3x} & f'(0) = 3e^0 = 3 \\ f''(x) = 9e^{3x} & f''(0) = 9e^0 = 9 \end{array}$$

ce qui donne le développement de Taylor suivant :

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9}{2} x^2 + \text{reste}.$$

N.B. Pour avoir le reste de Taylor-Lagrange on calcule aussi $f'''(x) = 27e^{3x}$, ce qui donne

$$\text{reste} = \frac{27}{6} e^{3c} x^3 = \frac{9}{2} e^{3c} x^3, \qquad \text{avec } c \text{ compris entre } 0 \text{ et } x.$$

b) Rappellons le *théorème des accroissements finis* : si une fonction f est continue sur un intervalle fermé $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Dans notre cas, pour tout $x > 0$ considerons la fonction $f(t) = e^{3t}$ sur l'intervalle $[0,x]$: elle est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$, donc il existe $c \in]0,x[$ tel que

$$\frac{e^{3x} - e^0}{x - 0} = 3e^{3c}.$$

Puisque $c \in]0,x[$, on a $c > 0$, d'où suit $3e^{3c} > 3e^0 = 3$. On a alors :

$$\frac{e^{3x} - 1}{x} = 3e^{3c} > 3 \quad \Longrightarrow \quad e^{3x} - 1 > 3x \quad \Longrightarrow \quad e^{3x} > 1 + 3x.$$