Interrogation n. 3 – Corrigé

Barème – 2.5 points par question, dont 1.5 pour la méthode et 1 pour les calculs.

Exercice – Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on cosidère le point $A(2, -3)$ et la droite Δ d'équation $3x + 4y - 9 = 0$.

Question 1 – Donner une équation cartésienne de la droite D parallèle à Δ et passant par A.

Réponse – Une droite dans le plan a équation $ax + by + c = 0$: pour être parallèle à Δ il faut que $a = 3$ et $b = 4$ (donc $3x + 4y + c = 0$), on détermine c en imposant qu'elle passe par le point A :

$$3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 6 - 12 + c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c = 6.$$

Donc D a équation : $3x + 4y + 6 = 0$.

Question 2 – Donner une équation cartésienne de la droite δ orthogonale à Δ et passant par A.

Réponse – La droite δ a une équation $ax + by + c = 0$ où, pour être orthogonale à Δ, il faut que le vecteur (a, b) soit orthogonal au vecteur $(3, 4)$ de Δ : il suffit de prendre $(a, b) = (4, -3)$, car le produit scalaire des deux vecteurs est nul :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = 0.$$

Donc δ a équation $4x - 3y + c = 0$, et on détermine c en imposant qu'elle passe par le point A :

$$4 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) + c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 8 + 9 + c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c = -17.$$

Donc δ a équation : $4x - 3y - 17 = 0$.

Question 3 – Calculer la distance du point A à la droite Δ.

Réponse – La distance d'un point $A(x_0, y_0)$ d'une droite Δ d'équation $ax + by + c = 0$ et donnée par la formule

$$\operatorname{dist}(A, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dans notre cas :

$$\operatorname{dist}(A, \Delta) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6 - 12 - 9|}{\sqrt{5^2}} = \frac{|-15|}{5} = 3.$$

Question 4 – Trouver l'ordonnée du point B de la droite Δ qui a abscisse $x = 1$ et montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont linéairement indépendants.

Réponse – Trouvons l'ordonné y du point $B\ (x, y)$ en supposant que $B \in \Delta$, donc $3x + 4y - 9 = 0$, et que $x = 1$:

$$3 + 4y - 9 = 4y - 6 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 6/4 = 3/2.$$

Donc B a coordonnées $(1, 3/2)$.

Les deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont donc :

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants si, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0.$$

L'implication "$\Longleftarrow$" est évidente, vérifions l'implication "$\Longrightarrow$" : supposons que $a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} = 0$, alors on a

$$a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} = a \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b \\ -3a + \frac{3}{2}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$\begin{cases} b = -2a \\ -3a + \frac{3}{2}(-2a) = -6a = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Donc les deux vecteurs sont linéairement indépendants.