CONTRÔLE FINAL 1ère SESSION – Mercredi 11 janvier 2017

Règlement – L'épreuve dure 2 heures. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Il est admis de consulter des notes personnelles qui tiennent sur une page A4 recto-verso. Entre parenthèses est indiqué le barème sur 20 points.

Exercice 1 **[5 pts = 1+2+2]** – On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, avec base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

a) Calculer le produit scalaire et le produit vectoriel des deux vecteurs

$$\vec{u} = (2, -1, 1) \qquad \text{et} \quad \vec{v} = (7, 0, -3).$$

b) Des deux applications $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ suivantes,

$$f(x, y, z) = \big(xz, x - y, y^2 + z\big) \qquad \text{et} \quad g(x, y, z) = \big(2x - z, 2y + z, x - y\big),$$

laquelle est linéaire ? (Justifier la réponse.)
Pour celle linéaire, trouver la matrice associée A et calculer son déterminant.

c) Trouver la matrice associée à l'application linéaire

$$T(x, y, z) = \left(x\,,\ \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}z\,,\ \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$$

et montrer que T est une rotation. (*Facultatif :* Quel est l'axe de rotation ? Quel est l'angle de rotation ?)

Exercice 2 **[3 pts = 1+2]** – On considère le plan cartésien, avec coordonnées cartesiennes (x, y).

a) Dessiner la droite Δ d'équation $y = 3x + 1$.

b) Dessiner la droite perpendiculaire à Δ passant par le point $(0, 1)$ et trouver son équation cartesienne.

Exercice 3 **[4 pts = 1+1+2]** – Trouver le domaine de définition de la fonction

$$u(t) = t\sqrt{1 - t^2}$$

et calculer ses dérivées u' et u''.

Exercice 4 **[3 pts]** – Calculer l'intégrale suivante, à l'aide du changement de variable $x = \sin\theta$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^5\theta \; d\theta.$$

Exercice 5 **[5 pts]** – Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \qquad \dot{x}(t) = \frac{1}{1 - t}\,x(t) + 6t$$

sur l'intervalle $]-\infty, 1[$.