Correction Contrôle continu numéro 1 - Mardi 3 octobre 2017

SUJET A

Question 1

La représentation polaire du nombre complexe $(1+i)^3$ est $2\sqrt{2}e^{i3\pi/4}$ (réponse d)

car $(1+i) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

Question 2

Les deux racines carrées du nombre complexe $-1+i\sqrt{3}$ sont $\pm\ \boldsymbol{\sqrt{2}e^{i\pi/3}}$ (réponse c)

car $-1+i\sqrt{3} = 2e^{2i\pi/3}$

Question 3

Pour les fonctions $f(x) = \frac{2x}{1+x}$ et $g(y) = \sqrt{y+3}$, la composée fog est la fonction qui a pour expression $\frac{2\sqrt{y+3}}{1+\sqrt{y+3}}$. (réponse a)

Question 4

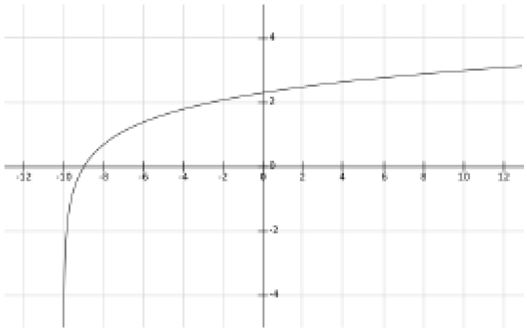
La réciproque de la fonction $h(t) = \sqrt{t+3}$ est la fonction $u \to h^{-1}(u)$ donnée par $h^{-1}(u) = u^2 - 3$ (réponse a)

car $\sqrt{t+3} = u \Leftrightarrow t+3 = u^2 \Leftrightarrow t = u^2 - 3$.

Question 5

Le graphe de la fonction $f(x) = \ln(x+10)$ est :

(réponse b)



Exercice 6

$\Delta = (3-2i)^2 - 4\times1\times(5-i) = 9-4-12i-20+4i = -15-8i$

On cherche $\delta = x+iy$ tel que $\Delta = \delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

De plus, $|\delta^2| = x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{(-15)^2+(-8)^2} = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17$

On doit donc résoudre :

$$\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ x^2-y^2=-15 \\ 2xy=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=2 \\ 2y^2=32 \\ xy=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=16 \\ xy=-4 \end{cases}$$

On a donc $\delta = 1-4i$ ou $\delta = -1+4i$

Les solutions de l'équation sont donc : $z_1 = \dfrac{3-2i+1-4i}{2} = 2-3i$ et $z_2 = \dfrac{3-2i-1+4i}{2} = 1+i$

SUJET B

Question 1

La représentation polaire du nombre complexe $(\sqrt{3}+i)^3$ est $4e^{i\pi/3}$ (réponse c)

car $\left(\sqrt{3}+i\right) = 2e^{i\pi/6}$

Question 2

Les deux racines carrées du nombre complexe $\sqrt{3}-i$ sont $\pm\,\boldsymbol{\sqrt{2}e^{-i\pi/12}}$ (réponse b)

car $\sqrt{3}-i = 2e^{-i\pi/6}$

Question 3

Pour les fonctions $f(x) = \frac{x}{1+2x}$ et $g(y) = \sin{(y+2)}$, la composée fog est la fonction qui a pour expression $\frac{\sin{(y+2)}}{1+2\sin{(y+2)}}$. (réponse c)

Question 4

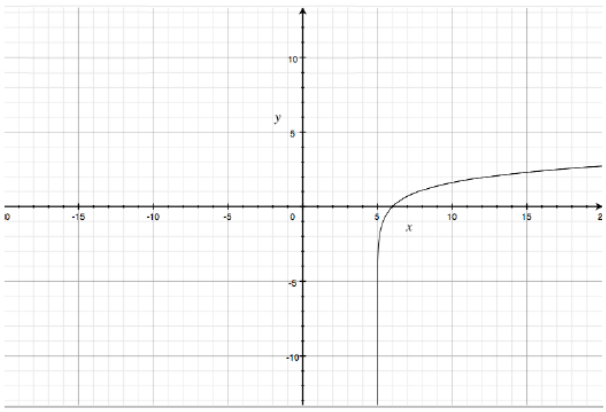
La réciproque de la fonction $h(t) = \sqrt[3]{t+2}$ est la fonction $u \to h^{-1}(u)$ donnée par $h^{-1}(u) = u^3 - 2$ (réponse a)

car $\sqrt[3]{t+2} = u \Leftrightarrow t+2 = u^3 \Leftrightarrow t = u^3 - 2$.

Question 5

Le graphe de la fonction $f(x) = \ln{(x-5)}$ est :

(réponse d)



Exercice 6

$\Delta = (3+4i)^2 - 4\times 1\times(-1+5i) = 9-16+24i+4-20i = -3+4i$

On cherche $\delta = x+iy$ tel que $\Delta = \delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

De plus, $\left|\delta^2\right| = x^2+y^2 = \left|\Delta\right| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

On doit donc résoudre :

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=-3 \\ 2xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=2 \\ 2y^2=8 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=4 \\ xy=2 \end{cases}$$

On a donc $\delta = 1+2i$ ou $\delta = -1-2i$

Les solutions de l'équation sont donc : $z_1 = \dfrac{3+4i+1+2i}{2} = 2+3i$ et $z_2 = \dfrac{3+4i-1-2i}{2} = 1+i$

SUJET C

Question 1

La représentation polaire du nombre complexe $(1-i\sqrt{3})^4$ est $16e^{-i4\pi/3}$ (réponse c)

car $1-i\sqrt{3}=2e^{-i\pi/3}$

Question 2

Les deux racines carrées du nombre complexe $\frac{4}{\sqrt{2}}+i\frac{4}{\sqrt{2}}$ sont $\pm\boldsymbol{2e^{i\pi/8}}$ (réponse b)

car $\frac{4}{\sqrt{2}}+i\frac{4}{\sqrt{2}}=4e^{i\pi/4}$

Question 3

Pour les fonctions $f(y)=e^{y-1}$ et $g(x)=\frac{x^2}{2x-1}$, la composée fog est la fonction qui a pour expression $e^{\frac{x^2}{2x-1}-1}=e^{\frac{(x-1)^2}{2x-1}}$. (réponse a)

Question 4

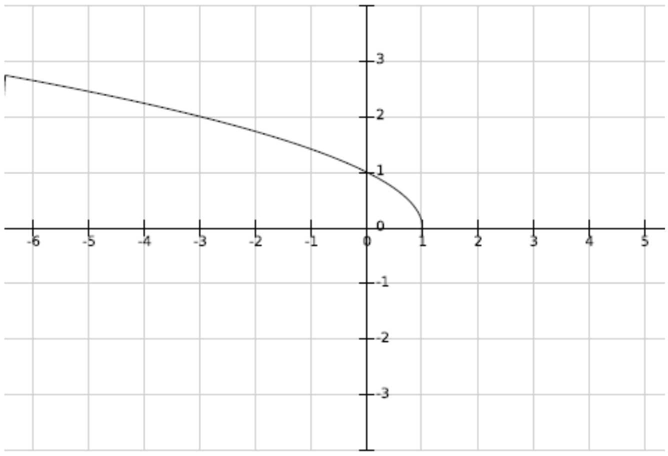
La réciproque de la fonction $h(t)=\ln(1-2t)$ est la fonction $u\to h^{-1}(u)$ donnée par $h^{-1}(u)=u^2-3$ (réponse a)

car $\ln(1-2t)=u \Leftrightarrow 1-2t=e^u \Leftrightarrow t=\frac{e^u-1}{-2}=\frac{1}{2}(1-e^u)$.

Question 5

Le graphe de la fonction $f(x)=\sqrt{1-x}$ est :

(réponse d)



Exercice 6

$\Delta=(1+i)^2-4\times1\times i=1-1+2i-4i=-2i$

On cherche $\delta=x+iy$ tel que $\Delta=\delta^2=x^2-y^2+2ixy$

De plus, $|\delta^2|=x^2+y^2=|\Delta|=2$

On doit donc résoudre :

$$\begin{cases}x^2+y^2=2\\x^2-y^2=0\\2xy=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2=2\\2y^2=2\\xy=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=1\\y^2=1\\xy=-1\end{cases}$$

On a donc $\delta=1-i$ ou $\delta=-1+i$

Les solutions de l'équation sont donc : $z_1=\dfrac{1+i+1-i}{2}=1$ et $z_2=\dfrac{1+i-1+i}{2}=i$