CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 2 – Séquence 1 – Mardi 24 octobre 2017

Règlement – L'épreuve dure 30 minutes. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Il n'est admis de consulter aucun document.
Les questions 1–5 ont une seule bonne réponse, qui vaut 2 points. Indiquez UNE seule réponse par question dans le tableau des réponses. L'exercice 6 vaut 10 points et la réponse doit être justifiée.

Question 1 – L'inégalité $\sqrt{1-x} > 1$ est vérifiée sur l'ensemble de $x \in \mathbb{R}$ tels que

(a) $x < 0$ (b) $x \leqslant 1$ (c) $0 < x \leqslant 1$ (d) $x \leqslant 0$

Question 2 – Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ est l'ensemble de $x \in \mathbb{R}$ tels que

(a) $x > -1$ et $x \neq 0$ (b) $-1 < x < 0$ (c) $x > 0$ (d) $x > -1$

Question 3 – La dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$ est la fonction $f'(x)$ suivante :

(a) $\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$ (b) $-\dfrac{e^x}{(x+1)^2}$ (c) $\dfrac{(x+2)e^x}{(x+1)^2}$ (d) $\dfrac{xe^x}{x+1}$

Question 4 – La dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt{x \ln x}$ est la fonction $f'(x)$ suivante :

(a) $\dfrac{1+\ln x}{2\sqrt{x \ln x}}$ (b) $\dfrac{x+\ln x}{2x\sqrt{x \ln x}}$ (c) $\dfrac{1}{2\sqrt{x \ln x}}$ (d) $\dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}$

Question 5 – La dérivée de la fonction $f(x) = e^{\sin(3x)}$ est la fonction $f'(x)$ suivante :

(a) $3\cos(3x)e^{\sin(3x)}$ (b) $e^{3\cos(3x)}$ (c) $3\cos(3x)\sin(3x)e^{\sin(3x)}$ (d) $-3\cos(3x)e^{\sin(3x)}$

TMB – CC1 – 24 octobre 2017 **Num. étudiant :**

NOM : **Prénom :**

Questions	1	2	3	4	5
Réponses	a	a	a	a	a

Exercice 6 – Pour la fonction

$$f(x) = \ln(x^4 + 1), \qquad x \in \mathbb{R}$$

trouver les points critiques et déterminer, si possible, s'ils sont des extrema locaux.

Réponse : Les points critiques sont ceux qui annulent f' :

$$f'(x) = \frac{4x^3}{x^4 + 1} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0$$

il y a donc un seul point critique $x = 0$, dans lequel f a valeur

$$f(0) = \ln 1 = 0.$$

Pour connaitre la nature du point critique on peut procéder de deux façons.

1) La première est de regarder le signe de $f'(x)$ autour de 0 et de dresser le tableau de variation de f. Puisque $x^4 + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{4x^3}{x^4 + 1} > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > 0,$$

donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

En conclusion, le point critique $x = 0$ est un minimum local.

2) En alternative au tableau de variation, pour connaitre la nature du point critique $x = 0$ on peut regarder le signe de f'' en 0 :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{12x^2(x^4+1) - 4x^3\,4x^3}{(x^4+1)^2} \\ &= \frac{12x^6 + 12x^4 - 16x^6}{(x^4+1)^2} \\ &= \frac{12x^2 - 4x^6}{(x^4+1)^2}, \end{aligned}$$

donc $f''(0) = 0$. Par conséquent, le ppint critique $x = 0$ est un point plat, et le calcul de f'' ne suffit pas à trouver sa nature. On poursuit alors le calcul des dérivées de f jusqu'à en trouver une non nulle en $x = 0$:

$$f'''(x) = \frac{8\,(3x - 12x^5 + x^9)}{(x^4+1)^3}$$

donc $f'''(0) = 0$ et

$$f^{(4)}(x) = \frac{8\,(3 - 93x^4 + 93x^8 - 3x^{12})}{(x^4+1)^4}$$

donc $f^{(4)}(0) = 24$. Puisque la première dérivée non nulle en $x = 0$ est d'ordre pair (l'ordre est 4), on regarde le signe qu'elle prend au point $x = 0$: le signe est positif, donc la fonction f est convexe autour du point 0, et par conséquent $x = 0$ est un minimum local (plat).