Fascicule d'exercices pour l'UE TMB

Automne 2018

Responsables : Alessandra Frabetti et Léon-Matar Tine

http ://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/TMB/

Programme du cours TMB

Prérequis. Notions sur les fonctions d'une variable réelle : limites, fonctions continues, dérivées, intégrales. Fonctions connues : polynômes, fractions, racines, fonctions circulaires, exponentielles, logarithmes. Résolution d'équations et systèmes d'équations polynomiales linéaires et du second degré.

Partie I. Fonctions et équations différentielles.

Chapitre 1. Nombres complexes.

1. Nombres complexes, conjugués. Opérations.
2. Module, argument, exponentielle complexe. Formule de Moivre.
3. Racines d'un polynôme complexe. Factorisation de polynômes réels.

Chapitre 2. Fonctions.

1. Graphes des fonctions d'une variable.
2. Fonctions croissantes, décroissantes, monotones. Fonctions paires et impaires.
3. Idée des limites et des fonctions continues.
4. Opérations entre fonctions, composition.
5. Fonctions réciproques des fonctions monotones et non monotones (arcsin, arctan).

Chapitre 3. Dérivées.

1. Dérivées. Dérivée des fonctions composées.
2. Points critiques, extrema locaux et points d'inflexion.
3. Dérivées d'ordres supérieurs. Formule de Taylor et approximations.

Chapitre 4. Primitives et intégrales.

1. Primitives et intégrales.
2. Intégration par partie et par changement de variable.
3. Primitive des fractions rationnelles. Calcul de l'aire.

Chapitre 5. Équations différentielles.

1. Classification des équations différentielles ordinaires.
2. Équations différentielles du 1er ordre. Condition initiale et unicité.
3. Équations différentielles linéaires du 2ème ordre à coefficients constants. Conditions initiales et unicité.

Partie II. Vecteurs, transformations linéaires et géométrie.

Chapitre 6. Espaces vectoriels et vecteurs.

1. Espaces vectoriels (produit par un scalaire). Combinaisons linéaires, base, dimension. Exemples : $\mathbb{R}^n$, vecteurs du plan et de l'espace.
2. Produit scalaire, norme.
3. Produit vectoriel et produit mixte.

Chapitre 7. Transformations linéaires et matrices.

1. Trasformations linéaires. Addition, composition, réciproque. Exemples sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, rotations, réflexions, translations.
2. Matrices. Addition, produit, déterminant, matrice inverse. axiale, translation).
3. Isomorphismes et isométries (rotations et réflexions). Symétries (déplacements et antidéplacements). Projections.
4. Résolution de systèmes d'équations linéaires.

Chapitre 8. Géométrie cartésienne du plan et de l'espace.

1. Coordonnées cartésiennes du plan. Droites, courbes coniques (cercles, ellipses, paraboles, hyperboles).
2. Coordonnées cartésiennes de l'espace. Plans, droites, surfaces quadriques (sphères, cylindres, cônes, paraboloïdes, hyperboloïdes).

TD 1 – NOMBRES COMPLEXES

Dans les exercices suivants, l'unité imaginaire est notée i ou j.

Exercice 1 – Nombres complexes et plan complexe
Dessiner les nombres complexes suivants sur le plan complexe :

a) $-2i$ b) $3+2i$ c) $\overline{3+2i}$ d) $5j-1$

Exercice 2 – Opération entre nombres complexes
Calculer les sommes, produits, quotients, parties réelle et imaginaire suivants :

a) $(3+2j)-(5j-1)$
b) $(3+2j)+(\overline{3+2j})$
c) $(3+2j)(5j-1)$
d) $(3+2j)(\overline{3+2j})$
e) $\dfrac{3+2j}{5j-1}$
f) $(3+2j)^2$
g) $\mathrm{Re}\big(i(1-i)\big)$
h) $\mathrm{Im}\big((1-i)i-3i\big)$

Exercice 3 – Représentation polaire des nombres complexes
Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants, les écrire sous forme polaire et les dessiner sur le plan complexe :

a) $-i$ b) $3+3j$ c) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^2$ d) $\left(\dfrac{1+j}{1-j}\right)^3$

Exercice 4 – Racines carrées de nombres complexes
Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants et les dessiner sur le plan complexe :

a) 1 b) -1 c) i d) $1+j$ e) $8-6i$

Exercice 5 – Équations complexes
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 = 7+24i$
b) $z^2-2jz+3j=0$
c) $iz^2+(1-5i)z+6i-2=0$
d) $z^3=-8i$
e) $z^5-z=0$
f) $z^5+1=0$
g) $27(z-1)^6+(z+1)^6=0$
h) $z^6-(3+2i)z^3+2+2i=0$

Exercice 6 – Factorisation de polynômes réels en polynômes complexes irréductibles
Trouver les racines complexes des polynômes réels suivants et écrire leur factorisation en produit de polynômes complexes irréductibles :

a) X^2+1 b) X^2+X+1 c) X^2+2X+2 d) X^2+3X+3

Exercice 7 – Factorisation de polynômes réels en polynômes réels irréductibles
Factoriser les polynômes réels suivants en produit de polynômes réels irréductibles, en utilisant les racines complexes si nécessaire :

a) X^3+1 b) X^4+1 c) X^4+3X^2+2

TD 2 – FONCTIONS ET RÉCIPROQUES

Exercice 8 – Graphe des fonctions élémentaires
À partir du graphe des fonctions élémentaires donné en cours, dessiner le graphe des fonctions réelles suivantes en précisant le domaine de définition. Indiquer celles qui sont strictement croissantes ou strictement décroissantes.

a) $f(x) = 2x^2 - 3$
b) $g(y) = \dfrac{1}{y} + 5$
c) $h(z) = 1 - \sqrt{z}$
d) $\Phi(t) = t^3 + 1$
e) $u(\theta) = 2\sin\theta - 1$
f) $y(x) = e^{2x}$
g) $z(u) = \ln(u - 1)$
h) $p(x) = \dfrac{2}{x-1}$
i) $F(y) = 2\arcsin(y)$
j) $G(z) = \arctan(z) + 5$
k) $H(x) = \ln(3x)$
l) $x(t) = \cos(2t)$

Exercice 9 – Fonctions composées
En utilisant les fonctions de l'exercice 8, calculer les fonctions composées suivantes :

a) $f\big(g(y)\big)$
b) $g\big(f(x)\big)$
c) $g\big(z(u)\big)$
d) $z\big(g(y)\big)$
e) $h\big(H(x)\big)$
f) $H\big(h(z)\big)$
g) $h\big(g\big(y(x)\big)\big)$
h) $g\big(H\big(p(x)\big)\big)$

Exercice 10 – Fonctions réciproques
Calculer la réciproque des fonctions de l'exercice 8.

Exercice 11 – Réciproque des fonctions circulaires
Calculer les valeurs suivants :

a) $\arcsin(1/2)$
b) $\arcsin(-\sqrt{3}/2)$
c) $\arctan(\sqrt{3}/3)$
d) $\arctan(-1)$
e) $\arcsin\left(\sin(2\pi/3)\right)$
f) $\arctan\left(\tan(9\pi/4)\right)$
g) $\sin\left(\arcsin(\sqrt{2}/\sqrt{5})\right)$
h) $\tan(\arctan 3)$

Exercice 12 – Échange de variable
À partir de l'expression $PV = nRT$, trouver l'expression des fonctions suivantes, par rapport à la variable indiquée entre parenthèses :

a) $P(V)$
b) $T(V)$
c) $P\left(\frac{1}{V}\right)$
d) $T\left(\frac{1}{V}\right)$

Exercice 13 – Équations et systèmes
Résoudre les équations et les systèmes suivants :

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$

b) $3u^2 - 5u - 2 = 0$

c) $x^2 - 5x + 4 = 0$

d) $x(x+1) = 0$

e) $y^2(y^2 - 4) = 0$

f) $\dfrac{1}{2t} - 1 = t$

g) $e^{4-3x^2} = 1$

h) $e^{2-3u} = 5$

i) $\ln\left(\dfrac{x+3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$

j) $\operatorname{ch} x + 2\operatorname{sh} x = 1$

k) $\begin{cases} x(y+1) = 0 \\ y^2(x^2-4) = 0 \end{cases}$

l) $\begin{cases} (x-1)(y^2-1) = 0 \\ xy(x-y) = 0 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x + y = 55 \\ \ln x + \ln y = \ln 700 \end{cases}$

n) $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 3 \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \end{cases}$

Exercice 14 – Inéquations
Résoudre les inéquations suivantes :

a) $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$

b) $u^2 > 4$

c) $\dfrac{1}{2x} - 1 \geqslant 0$

d) $x(x-2)(x^2-1) < 0$

e) $\sin(2y) < 0$

f) $\cos^2\theta \geqslant 1/4$

g) $\arcsin x \geqslant 1/2$

h) $x \arctan x \leqslant 0$

i) $e^{3x^2} > 1$

j) $(3-x)\ln x > 0$

k) $\ln u \leqslant 1$

l) $\ln(\ln t) \geqslant 0$

Exercice 15 – Équations et inéquations sur les fonctions circulaires
Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

a) $\cos 4x = \sin 7x$

b) $\cos^2\theta = 1/4$

c) $\sin(2t) = \cos^2 t$

d) $\sin(\pi x) = 0$

e) $\arcsin x = \dfrac{2\pi}{3}$

f) $\arctan y = \dfrac{2\pi}{3}$

g) $\arcsin x + \arctan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{4}$

h) $\sin(2y) < 0$

i) $\cos^2\theta \geqslant 1/4$

j) $\arcsin x \geqslant 1/2$

k) $x \arctan x \leqslant 0$

Exercice 16 – Domaine de définition de fonctions
Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x+1}$

b) $g(y) = \sqrt{y^3-8} + \sqrt{y^3+8}$

c) $h(z) = \ln(z+5)$

d) $\Phi(t) = \ln\sqrt{t^2-4}$

e) $u(\theta) = \dfrac{1}{\sin\theta}$

f) $y(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

g) $z(u) = \ln(\tan u)$

h) $p(x) = \sqrt{1-x^2}$

i) $F(y) = \ln(1-y^2)$

j) $G(z) = \arcsin\frac{2z}{1+z^2}$

k) $H(x) = \arctan(x) + 5$

l) $x(t) = \sqrt{\cos t}$

TD 4 – DÉRIVÉES

Exercice 17 – Dérivées avec la règle de Leibniz
Calculer la dérivée des fonctions suivantes, en utilisant la règle de Leibniz pour les produits et les quotients :

a) $f(x) = x^2 e^x$

b) $f(y) = \dfrac{1}{y^3}$

c) $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z+1}$

d) $f(u) = \dfrac{u^4(u-1)}{u^2+u^3}$

e) $g(x) = \sin x\, \cos x$

f) $g(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$

g) $g(t) = \dfrac{\ln t}{t} + \dfrac{t}{e^t}$

h) $g(u) = u^2 \ln(u) e^u$

i) $h(x) = x\sin x + \cos x$

j) $h(z) = z^2 \arcsin(z)$

k) $h(t) = \dfrac{\arctan(t)}{1+t^2}$

l) $h(u) = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u$

Exercice 18 – Dérivées avec la règle de la chaîne
Calculer la dérivée des fonctions suivantes, en utilisant la règle de la chaîne pour les fonctions composées :

a) $f(x) = (x^2+3x-1)^5$

b) $f(y) = \dfrac{1}{(y^3+1)^5}$

c) $f(t) = \sqrt{\sin t}$

d) $g(x) = e^{x^3+2x+1}$

e) $g(y) = \ln(2y^2+1)$

f) $g(t) = \ln(\ln t)$

g) $h(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

h) $h(z) = \arcsin\sqrt{z+1}$

i) $h(t) = \left(\dfrac{t}{1-\sqrt{1-t^2}}\right)^2$

Exercice 19 – Dérivées avec toutes les règles
Calculer la dérivée des fonctions suivantes, en utilisant la règle de Leibniz et celle de la chaîne :

a) $f(x) = x^2\sqrt{1+x^2}$

b) $g(y) = \dfrac{\sqrt{1+y}}{1+\sqrt{y}}$

c) $h(z) = \dfrac{z}{z-\sqrt{1+z^2}}$

d) $x(t) = 2t\,\ln(\sqrt{2t})$

e) $y(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

f) $z(y) = \dfrac{e^{\sin y}}{\cos y}$

g) $F(u) = u\tan(u^2+1)$

h) $G(v) = v\arcsin v + \sqrt{1-v^2}$

i) $H(\theta) = \arcsin(2\theta^2-1)$

Exercice 20 – Dérivées (Facultatif)
Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $g(x) = 2x\sqrt{x}$

b) $f(z) = \sqrt{z^2-3z+1}$

c) $h(y) = \arcsin(y^2+y)$

d) $f(t) = \dfrac{t-1}{t^2+1}$

e) $g(z) = \dfrac{1}{\ln(z)}$

f) $h(y) = \dfrac{\sin y}{y^3}$

g) $g(z) = \ln\left(\dfrac{2z}{z^2+1}\right)$

TD 5 – EXTREMA LOCAUX ET FORMULE DE TAYLOR

Exercice 21 – Extrema locaux

Déterminer les extrema locaux (minimums et maximums), s'il y en a, des fonctions (dérivables) ci-dessous.

Hint : Étapes à suivre pour chaque fonction $f(x)$:

- Trouver le domaine de définition de la fonction.
- Calculer la dérivée $f'(x)$ et trouver les points critiques ($f'(x) = 0$).
- Trouver le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations en indiquant où la fonction est croissante ($f'(x) > 0$) et où elle est décroissante ($f'(x) < 0$).
- Parmi les points critiques, trouver les extrema locaux (minimums et maximums) et calculer la valeur correspondante de f.

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

b) $f(x) = x^4 + 2x^3$

c) $f(x) = \dfrac{1}{3 + x^2}$

d) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$

e) $f(x) = \ln(1 - x^2)$

f) $f(x) = \sin(x^2)$

Exercice 22 – Points d'inflexion, convexité et concavité

Détérminer les points d'inflexion, s'il y en a, des fonctions de l'exercice 21.

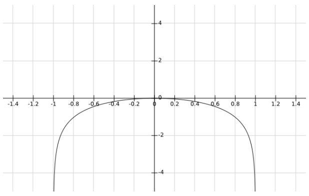
Hint : Étapes à suivre pour chaque fonction $f(x)$:

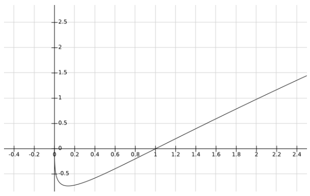
- Calculer la dérivée seconde $f''(x)$ et trouver les points où $f''(x) = 0$.
- Parmi ceux-ci, trouver les points d'inflexion (autour desquels $f'(x)$ ne change pas de signe).

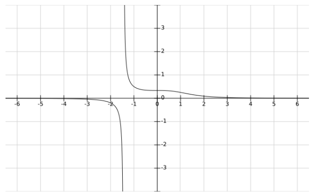
Remarque : On peut profiter de ces calculs pour vérifier la nature des points critiques : en un minimum local la fonction est convexe ($f''(x) > 0$), en un maximum local la fonction est concave ($f''(x) < 0$).

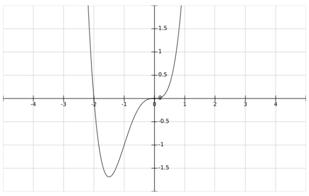
Exercice 23 – Graphe de fonctions

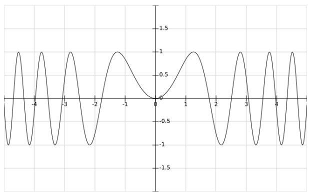
Indiquer, parmi les fonctions de l'exercice 21, laquelle correspond à chacun des graphes suivants (attention, il y a un piège !) :

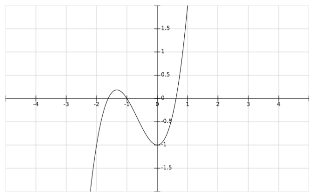
A) 

C) 

E) 

B) 

D) 

F) 

Exercice 24 – Allure de fonction suivant différentes variables

Tracer l'allure des fonctions P et T de l'exercice 12, en fonction des variables V et $\dfrac{1}{V}$.

Exercice 25 – Polynôme de Taylor

En utilisant la formule de Taylor-Young (avec reste négligeable), trouver le polynôme de Taylor à l'ordre 2 des fonctions suivantes, autour des points indiqués :

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ $\quad x_0 = 0$ et $x_0 = 1$

b) $f(x) = \sin(3x)$ $\quad x_0 = 0$ et $x_0 = \pi/2$

c) $f(x) = e^{2x}$ $\quad x_0 = 0$ et $x_0 = 1$

d) $f(x) = \ln(1 + 2x)$ $\quad x_0 = 0$ et $x_0 = 1$

e) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ $\quad x_0 = 0$ et $x_0 = 1$

f) $f(x) = \cos^2 x$ $\quad x_0 = 0$ et $x_0 = \pi/2$

Exercice 26 – Valeurs approchées

En utilisant les polynômes de Taylor de l'ex. 25, calculer les valeurs approchées suivantes, à l'ordre 1 et 2 :

a) $\dfrac{1}{1 + 10^{-2}}$

b) $e^{1/10}$

c) $\ln(1 + 2/100)$

d) $\cos^2(10^{-3})$

Exercice 27 – Primitives élémentaires
À l'aide d'un tableau de dérivées des fonctions élémentaires, calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int (x^5 + 3x^3 + x^2)\ dx$

b) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3}\right)\ dy$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+y^2}\ dy$

d) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{u\sqrt{u}}\right)\ du$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

f) $\displaystyle\int (5e^t + 2e^{-t})\ dt$

g) $\displaystyle\int (e^{5t} + e^{-2t})\ dt$

h) $\displaystyle\int (\sin\theta - \cos\theta)\ d\theta$

i) $\displaystyle\int \sin(3\theta)\ d\theta$

j) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2\theta}\ d\theta$

k) $\displaystyle\int \operatorname{sh}(2x)\ dx$

l) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\ dx$

Exercice 28 – Intégration par partie
Calculer les primitives suivantes par partie :

a) $\displaystyle\int xe^{-x}\ dy$

b) $\displaystyle\int (x^2 + 5x + 6)\sin x\ dx$

c) $\displaystyle\int e^x \cos x\ dx$

d) $\displaystyle\int \cos^2 u\ du$

e) $\displaystyle\int \ln t\ dt$

f) $\displaystyle\int u^2 \ln u\ du$

g) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\ dx$

h) $\displaystyle\int \sin(3x)\cos(5x)\ dx$

i) $\displaystyle\int \arctan y\ dy$

Exercice 29 – Intégration par changement de variable
Calculer les primitives suivantes en effectuant le changement de variable indiqué :

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\ dx \quad (x = \tfrac{1}{t})$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}\ dx \quad (x = -\ln t)$

c) $\displaystyle\int x\,(5x^2-3)^7\ dx \quad (u = 5x^2 - 3)$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\ dx \quad (u = e^{-x})$

e) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x^3}\ dx \quad (u = \sqrt{1+x^3})$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{3+2\cos x}\ dx \quad (t = \tan\tfrac{x}{2})$

Exercice 30 – Primitives des fractions rationnelles
Calculer les primitives suivantes par changement de variable :

a) $\displaystyle\int \frac{1}{2x+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{4+9x^2}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx$

j) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx$

k) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x}{x+1}\,dx$

l) $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$

Exercice 31 – Primitives et intégrales
Calculer les primitives ou intégrales suivantes par changement de variable :

a) $\displaystyle\int \sin^4 x\cos x\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

i) $\displaystyle\int (x+2)\sin(x^2+4x-6)\,dx$

j) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{4x+2}}\,dx$

k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$

l) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\,dx$

m) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x\,\cos x}\,dx$

n) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{ch} x\operatorname{sh} x}\,dx$

o) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos x+\sin x}\,dx$

p) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

q) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$

r) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,dx$

Exercice 32 – Calcul d'aires
En utilisant des intégrales, calculer l'aire des domaines suivants du plan :

a) $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant x\leqslant \pi/4,\ 0\leqslant y\leqslant \tan x\right\}$

b) $B = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leqslant x\leqslant 5,\ 0\leqslant y\leqslant \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}\right\}$

c) $C = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant \dfrac{e^{3x}}{1+e^{2x}}\right\}$

Exercice 33 – Équations différentielles linéaires du 1er ordre
Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $f'(t) = 0$

b) $\dot{g}(t) = t^3$

c) $x'(t) = x(t) + t$

d) $\dfrac{d\,y(t)}{dt} = -y(t) + t^2$

e) $z'(t) = t\ z(t)$

f) $(1+t^2)\,\dot{u}(t) + t\,u(t) = 2t^2 + 1$

g) $t^2\,\dfrac{d\,x(t)}{dt} = x(t)$

h) $f'(t) - \dfrac{1}{2t}\,f(t) = \dfrac{t+1}{t}$

i) $(1+t^2)\,z'(t) + z(t) = 0$

j) $\cos t\ \dot{x}(t) + \sin t\ x(t) = 1$

k) $2z'(t) - 3z(t) = 0$

l) $t\,y'(t) + 2y(t) = t^2 - 3$

m) $x'(t) - \dfrac{2}{t+1}\,x(t) = (t+1)^3$

n) $\dot{u}(t) + 2u(t) = 0$

o) $t^3\,\dfrac{d\,g(t)}{dt} + t^2\,g(t) = t$

Exercice 34 – Équations différentielles du 1er ordre avec condition initiale
Résoudre les équations différentielles suivantes et trouver l'unique solution qui vérifie la condition initiale donnée :

a) $\begin{cases} t\ \dot{x}(t) - 2x(t) = t^3 \\ x(1) = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sin t\ y'(t) = y(t) \\ y(\frac{\pi}{2}) = 3 \quad \text{et} \quad y(-\frac{\pi}{2}) = 5 \end{cases}$

c) $\left\{ \dfrac{d\,z(t)}{dt} - \dfrac{2}{t}\,z(t) = t^2 e^t \right.$

d) $\left\{ t\,u'(t) - t\,u(t) = e^t \right.$

Exercice 35 – Équations différentielles non linéaires du 1er ordre
Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $r'(t) = \dfrac{1}{r(t)}$

b) $z'(t) = z^2(t)$

c) $\dot{r}(t) = \dfrac{1}{r^2(t)}$

d) $\dfrac{d\,x(t)}{dt} = e^{(t+x(t))}$

e) $y'(t) = t\,\big(y^2(t) - 1\big)$

f) $t\,\dot{z}(t) + z^2(t) = 0$

TD 9 – ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU 2ÈME ORDRE

Exercice 36 – Équations différentielles du 2ème ordre à coefficients constants

a) $f''(t) = 0$

b) $\ddot{g}(t) = t^3$

c) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{d\,x}{dt} = 0$

d) $\ddot{x}(t) - 4\dot{x}(t) + 3x(t) = 0$

e) $u''(t) - 6u'(t) + 9u(t) = 0$

f) $x''(t) + x'(t) + x(t) = 0$

g) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = t + 1$

h) $z''(t) - 2z'(t) + z(t) = e^t + t$

i) $\ddot{u}(t) + \dot{u}(t) - 2u(t) = \sin t$

j) $f''(t) + f(t) = \cos^2 t$

k) $g''(t) - 2g'(t) + 5g(t) = 10\cos t$

l) $\ddot{z}(t) - 3\dot{z}(t) + 2z(t) = e^{-t}$

m) $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = \sin(2t)$

n) $u''(t) + 2u'(t) - 5u(t) = 0$

Exercice 37 – Équations différentielles du 2ème ordre avec conditions initiales

Résoudre les équations différentielles suivantes et trouver l'unique solution qui vérifie la condition initiale donnée :

a) $\begin{cases} f''(t) + f'(t) - 12f(t) = 0 \\ f(2) = 2 \\ f'(2) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \ddot{u}(t) + 9u(t) = 0 \\ u(\pi/2) = 0 \\ \dot{u}(\pi/2) = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 4t \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = e^{2t} \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$

TD 10 – ESPACES VECTORIELS ET VECTEURS

Dans les exercises suivants, on fixe la base canonique $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ et $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$, et un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ dans l'espace, par rapport auxquels les vecteurs sont donnés en coordonnées.

Exercice 38 – Combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

a) Exprimer le vecteur $\vec{E} = (5,2,1)$ de $\mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$.

b) Le vecteur $\vec{E} = (5,2,1)$ de $\mathbb{R}^3$ peut-il s'exprimer comme combinaison linéaire des trois vecteurs

$$\vec{u} = (1,0,1), \qquad \vec{v} = (0,1,1) \qquad \text{et} \qquad \vec{w} = (1,1,0)?$$

c) Montrer que les vecteurs $\vec{E} = (0,6,1)$ et $\vec{F} = (5,4,-1)$ sont des combinaisons linéaires de

$$\vec{u} = (1,2,0) \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = (-3,0,1).$$

Montrer que le vecteur $\vec{G} = (4,2,0)$ ne l'est pas.

Exercice 39 – Bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

a) Les vecteurs $\vec{u} = (1,1)$ et $\vec{v} = (1,-1)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?
Autrement dit, peut-on écrire tout vecteur $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

b) Les vecteurs $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (0,1,1)$ et $\vec{w} = (1,1,0)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 40 – Produit scalaire et vecteurs orthogonaux dans le plan

Dans le plan cartesien, dessiner les deux vecteurs $\vec{u} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

a) Calculer les normes $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b) Calculer et dessiner le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ et les deux vecteurs $\vec{u}^{\perp}$ orthogonaux à $\vec{u}$ et de même norme.

Exercice 41 – Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte dans l'espace

Dans l'espace cartesien, on considère les trois vecteurs $\vec{u} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$, et $\vec{w} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$.

a) Calculer les normes $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$ et le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b) Calculer et dessiner les vecteurs $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{v} \wedge \vec{u}$, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

c) Calculer le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Exercice 42 – Identités notables du calcul vectoriel (Facultatif)

Démontrer que pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace on a :

a) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\, \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\, \vec{w}$; et $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\, \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\, \vec{u}$;

b) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2$;

c) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\Big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\Big)$;

d) les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

[*Hint* : fixer un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et effectuer un calcul composante par composante.]

TD 11 – TRANSFORMATIONS LINÉAIRES ET MATRICES

Dans les exercises suivants, on fixe un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ dans l'espace, identifié à $\mathbb{R}^3$.

Exercice 43 – Transformations linéaires et matrices
Parmi les applications suivantes, trouver celles qui sont linéaires et justifier votre réponse (en calculant $f(a\vec{u} + b\vec{v})$ et $af(\vec{u}) + bf(\vec{v})$ dans les deux premiers cas). Pour les applications linéaires, déterminer leur matrice associée.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,,\ (x, y) \mapsto (y - 3x, 5x + 2y)$
b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ (x, y) \mapsto x^2 - 5y$
c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,,\ (u, v) \mapsto (2u + 3v, u - 5v)$
d) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ (t, \theta) \mapsto t \sin\theta$
e) $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ (t, \theta) \mapsto 3t + \theta$
f) $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,,\ x \mapsto (2x, 0, -3x)$
g) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,,\ (x, y, z) \mapsto (x + 2z, y - z - x)$
h) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,,\ (u, v) \mapsto (1 - v, 2u, 3v - 4)$
i) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ (u, v, w) \mapsto (w - v, 2u, 3v - 4w)$

Calculer les composées $f \circ h$, $h \circ f$, $G \circ f$, $h \circ L$ et $L \circ Q$.

Exercice 44 – Produit et détérminant de matrices
Calculer, si possible, les produits et les détérminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 45 – Isomorphismes, isométries, rotations et réflexions
Parmi les transformations linéaires associées aux matrices suivantes, indiquer lesquelles sont des isomorphismes, des isométries, des rotations ou des réflexions :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

n) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 46 – Systèmes d'équations linéaires
Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants, si cela est possible, en les mettant sous forme matricielle :

a) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 6y - 3x = 5 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

TD 12 – GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE DANS LE PLAN

Dans le plan, on fixe un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et on note (x, y) les coordonnées d'un point générique.

Exercice 47 – Distance et droites
Dans le plan, dessiner les deux points $A(1,3)$ et $B(-1,0)$.

a) Calculer la distance entre A et B.

b) Dessiner la droite Δ passant par A et B, et déterminer son équation.

c) Dessiner la droite parallèle à Δ passant par O, et déterminer son équation.

d) Dessiner la droite orthogonale à Δ passant par O, et déterminer son équation.

Exercice 48 – Distance, projection orthogonale et droites
Dans le plan, dessiner le point $A(5,3)$ et la droite Δ d'équation $x - y + 1 = 0$.

a) Calculer la distance du point A à la droite Δ.

b) Dessiner et trouver la projection orthogonale de A sur Δ.

c) Dessiner la droite parallèle à Δ passant par A, et déterminer son équation.

d) Dessiner la droite perpendiculaire à Δ passant par A , et déterminer son équation.

Exercice 49 – Courbes coniques
Décrire et dessiner les coniques suivantes, ainsi que leurs axes de symétrie ou leurs asymptotes :

a) $x^2 - 4y^2 = 1$

b) $x^2 + 4y^2 = 1$

c) $x = (y-1)^2 + 1$

d) $xy = 3$

e) $(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 9$

f) $y = x^2 + 3$

Exercice 50 – Droites ou coniques ?
Les équations cartésiennes suivantes décrivent-elles des droites ou des coniques ?

a) $2x - 3y + 1 = 0$

b) $x = 2$

c) $(x-1)^2 + y^2 = 7$

d) $(x-1)^2 = y^2$

e) $2x^2 + 3y^2 = 1$

f) $2x^2 - 3y^2 = 1$

g) $(x+1)y = 5$

h) $y = x^2 + 2x$

i) $x = 2y^2 - 3$

Exercice 51 – Lieux de points dans le plan complexe
Déterminer l'ensemble des points P du plan, d'affixe $z \in \mathbb{C}$, tels que :

a) $z^2 + 2z - 3 \in \mathbb{R}$

b) $|1 - z| \leqslant 1/2$

c) $\mathrm{Re}(1 - z) \leqslant 1/2$

d) $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right| < 2$

e) $\dfrac{2z-4}{z-i} \in \mathbb{R}$

f) $|(1-i)z - 3i| = 3$

Exercice 52 – Lieux de points dans le plan complexe (Facultatif)
Déterminer l'ensemble des points P du plan, d'affixe $z \in \mathbb{C}$, tels que :

a) $\mathrm{Re}(iz) \leqslant 1/2$

b) $\left|1 - \dfrac{1}{z}\right|^2 = 2$

c) $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$

d) $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| \leqslant \sqrt{2}$

TD 13 – GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE DANS L'ESPACE

Dans l'espace, on fixe un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et on note (x, y, z) les coordonnées d'un point générique.

Exercice 53 – Distance et plans
Dans l'espace, dessiner le point $A(1, 2, 3)$.

a) Calculer la distance entre A et l'origine O.
b) Dessiner le plan passant par A et orthogonal au vecteur $\vec{v} = 4\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 6\vec{k}$, et écrire son équation.
c) Dessiner le plan passant par A et parallèle au plan $3x - 2y + 4z - 5 = 0$, et écrire son équation.
d) Dessiner le plan passant par A, $B(3, -2, 1)$ et $C(5, 0, -4)$, et écrire son équation.

Exercice 54 – Distance, plans, droites et projections orthogonales
Dans l'espace, dessiner les trois points $A = (0, 1, 2)$, $B = (-1, 0, 1)$ et $C = (1, 1, 0)$.

a) Déterminer l'équation du plan π passant par les points A, B, C et l'intersection de π avec les trois axes. Dessiner le plan et les points.
b) Calculer la distance au plan π de l'origine O et la projection orthogonale de O sur π ;
c) Déterminer une équation paramétrique de la droite Δ passant par A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{BC}$, et l'intersection $\pi \cap \Delta$. Dessiner la droite et le point d'intersection.

Exercice 55 – Longueur d'un segment
Déterminer la longueur de la diagonale du cube unité de $\mathbb{R}^3$ de deux manières différentes :

a) géométriquement, en utilisant deux fois le théorème de Pythagore ;
b) analytiquement, en utilisant la distance dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 56 – Surfaces quadriques
Décrire et dessiner les quadriques suivantes :

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
b) $x^2 + y^2 = 4$
c) $z = x^2 + y^2$
d) $z^2 = x^2 + y^2$
e) $(y - 1)^2 + 4(z + 2)^2 = 9$
f) $y = x^2 + 3$

Exercice 57 – Droites, coniques, plans ou quadriques ?
Les équations cartésiennes suivantes décrivent-elles des droites, des coniques, des plans ou des quadriques ?

a) $2x - 3y - z + 1 = 0$
b) $y = 2$
c) $\begin{cases} 2x - 3y - z + 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$
d) $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 7$
e) $\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 7 \\ y = 2 \end{cases}$
f) $(x - 1)^2 + y^2 = 7$
g) $\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 7 \\ z = 2 \end{cases}$
h) $(x - 1)^2 = y^2$
i) $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$
j) $2x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 1$
k) $2x^2 - 3y^2 - 4z^2 = 1$
l) $z = 2x^2$
m) $\begin{cases} z = 2x^2 \\ y = 2 \end{cases}$
n) $z = 2x^2 + 3y^2$