Master M2, SITN et Data Science, Université Claude Bernard, Lyon1
Statistique inférentielle
année 2017-2018

Devoir Maison: A rendre le 13 octobre 2017

Exercice 1.
Soit une variable aléatoire continue réelle X, de densité:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ (\theta - 1)x^{-\theta} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

avec le paramètre θ inconnu et $\theta > 2$.
On considère un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ pour cette loi (variable).
1) Calculez l'espérance de la variable aléatoire X.
2) Trouvez un estimateur par la méthode des moments pour le paramètre θ.
3) Etudiez la convergence de l'estimateur de θ suivant:

$$\hat{\theta}_n = \frac{2\bar{X}_n - 1}{\bar{X}_n - 1}.$$

Exercice 2.
Soit la variable aléatoire X de loi Normale $\mathcal{N}(m, 1)$ et $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon pour cette variable aléatoire.
Remarque: pour répondre aux questions de cet exercice, vous pouvez utiliser les résultats obtenus en classe ou les résultats donnés dans le polycopié distribué. La demonstration des résultats n'est pas demandée.
1) Donnez l'estimateur du maximum de vraisemblance pour m. On note cet estimateur par T_n.
2) Quelle est la loi de T_n?
3) L'estimateur T_n est-il convergent? Donnez la justification dans une phrase.
4) L'estimateur T_n est-il biaisé? Donnez la justification dans une phrase.

Exercice 3.
Soit une variable aléatoire continue réelle X, de densité:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{4} \exp\left(\frac{\theta x}{2}\right), & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\theta}{4} \exp\left(-\frac{\theta x}{2}\right), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

avec le paramètre θ inconnu et $\theta > 0$.
On considère un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ pour cette loi (variable).
1) Calculez l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.
2) Trouvez un estimateur par la méthode des moments pour le paramètre θ.
3) Etudiez la convergence de l'estimateur de θ trouvé à la question précédente.

Exercice 4.
Soit la variable aléatoire X de loi Bernoulli $\mathcal{B}er(2\theta)$, avec $\theta \in (0, 1/2)$ un paramètre inconnu et $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon pour cette variable aléatoire.
1) Trouvez l'estimateur du maximum de vraisemblance pour le paramètre θ.
2) Etudiez la convergence et le biais de l'estimateur trouvé à la question précédente.

Exercice 5.
Une fête est organisée pour des étudiants. On invite 200 étudiants à cette fête. Sachant que parmi les 200 étudiants, 50 disent qu'ils iront à la fête, donnez, avec un niveau de confiance de 0.95, la plus petite et la plus grande valeur de la proportion des étudiants qui iront à la fête.