Document de synthèse présenté pour l'obtention de l'

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

par **Ivan Gentil**

Discipline : Mathématiques

Sous la coordination de **Jean Dolbeault**

Inégalités fonctionnelles : probabilités et EDP

Soutenue le 11 Juillet 2008 devant le jury composé de :

Dominique	Bakry	Université Paul Sabatier	Examinateur
Jean	Dolbeault	Université Paris-Dauphine	Coordinateur
Maria J.	Esteban	Université Paris-Dauphine	Examinatrice
Nassif	Ghoussoub	University of British Columbia	Examinateur
Alice	Guionnet	Ecole Normale Supérieure de Lyon	Rapporteure
Michel	Ledoux	Université Paul Sabatier	Examinateur
Felix	Otto	Universität Bonn	Rapporteur
Laurent	Saloff-Coste	Cornell University	Rapporteur

CEREMADE

UMR CNRS 7534, Université Paris-Dauphine

REMERCIEMENTS

Je tiens tout particulièrement à remercier Jean Dolbeault d'avoir accepté de coordonner cette habilitation et de partager de belles courses en montagne.

Je remercie mes rapporteurs, Alice Guionnet, qui la première m'a initié aux inégalités de Sobolev logarithmiques, Felix Otto qui avec Cédric Villani a ouvert de belles perspectives autour des inégalités de transport et enfin Laurent Saloff-Coste d'avoir accepté cette tâche de rapporteur.

Je remercie aussi les autres membres du jury : Dominique Bakry qui m'a souvent soutenu, Michel Ledoux qui m'a formé dans mes premières années de recherches, Maria J. Esteban qui apporte un dynamisme au laboratoire et enfin Nassif Ghoussoub qui a accepté de faire partie de ce jury.

La rédaction de cette habilitation ne serait pas la même sans l'aide de mes différents collaborateurs, aussi je salue Cécile Ané, Sébastien Blachère, Sergei Bobkov, José Antonio Carrillo de la Plata, Patrick Cattiaux, Manuel Del Pino, Pierre Fougères, Arnaud Guillin, Cyril Imbert, Ansgar Jüngel, Florent Malrieu, Laurent Miclo, Bruno Rémillard, Cyril Roberto, Grégory Scheffer, Feng-Yu Wang et enfin Boguslaw Zegarlinski.

Je remercie tous les membres du CEREMADE, enseignant-chercheurs et administratifs, qui m'ont fait bénéficier de conditions de travail excellentes. Je remercie également ces mathématiciens qui m'apportent et me soutiennent beaucoup parfois autour d'un café, d'un thé mais aussi autour d'autre chose, je pense en particulier à Alessandra, Antoine, Antonin, Arnaud, Bénédicte, Bob, Bruno, Céline, Christian, Clotilde, Cyril, Djélil, Dominique, Florent, François, Isabelle, Jean-Michel, Miclo, Patrick, Pierre....

Enfin, je profite de cette occasion pour rendre hommage à Anne-Laure qui me supporte depuis maintenant quelques années.

à Éléonore…

RÉSUMÉ

Ce document présente une synthèse des travaux de recherche effectués après la thèse, soutenue à l'université Toulouse III en décembre 2001.

Une large partie de ces recherches est consacrée aux inégalités fonctionnelles, dont les inégalités de Poincaré ou de Sobolev logarithmique sont deux représentantes emblématiques. De façon générale, les inégalités fonctionnelles sont à la frontière de l'analyse et des probabilités et sont utilisées dans de nombreux problèmes mathématiques. On pourra citer par exemple l'étude de la convergence à l'équilibre d'équations différentielles ou de chaîne de Markov, l'étude des ensembles convexes en grande dimension, l'étude de la concentration de mesures produits ou corrélées, l'étude de la convergence de systèmes de particules, ou l'étude de l'existence d'une unique mesure de Gibbs en mécanique statistique. La résolution de chacun de ces problèmes repose sur l'établissement d'une inégalité fonctionnelle adaptée au modèle.

Dans ce mémoire, nous traitons ces problèmes de deux façons. D'une part, nous nous intéressons directement aux inégalités fonctionnelles, en cherchant à établir des hiérarchies entre elles, à trouver des critères simples permettant d'établir leur existence. D'autre part, à partir de problèmes de convergence à l'équilibre d'équations d'évolutions, nous élaborons et utilisons des inégalités fonctionnelles appropriées permettant d'obtenir des taux de convergence à l'équilibre.

Ce document est divisé en 5 chapitres. Les 4 premiers chapitres traitent des inégalités fonctionnelles et leurs implications pour des équations d'évolutions linéaires, non-linéaires, locales ou non-locales.

Le dernier chapitre traite quant à lui un tout autre problème. Nous essayons de montrer la convergence à l'équilibre d'un algorithmique génétique utilisé pour des problèmes de filtrage non-linéaire.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Ce document est une synthèse des travaux effectués après la thèse. Avant de voir plus en détail dans les chapitres suivants les différents résultats, en voici une courte introduction.

Mes travaux de recherche sont largement tournés vers les inégalités fonctionnelles et leurs applications en probabilités et pour l'étude d'équations aux dérivées partielles. Les deux inégalités les plus emblématiques sont les inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique que l'on peut décrire brièvement sur $\mathbb{R}^n$: Si μ est une mesure de probabilité, on dit que μ vérifie un inégalité de Poincaré si l'on peut comparer la variance à l'énergie, c'est-à-dire s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction régulière f,

$$\mathbf{Var}_\mu(f) := \int f^2 d\mu - \left(\int f d\mu \right)^2 \leqslant C \int |\nabla f|^2 d\mu.$$

Par ailleurs la mesure de probabilités vérifie l'inégalité de Sobolev logarithmique si l'on peut comparer l'entropie avec l'énergie

$$\mathbf{Ent}_\mu(f^2) := \int f^2 \log \frac{f^2}{\int f^2 d\mu} d\mu \leqslant C \int |\nabla f|^2 d\mu.$$

N'oublions pas qu'une version de l'inégalité de Sobolev logarithmique existe sur $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue, et est appelée inégalité de Sobolev logarithmique de type euclidien :

$$\mathbf{Ent}_{dx}(f^2) \leqslant \frac{n}{2} \log \left(\frac{1}{\pi n e} \int |\nabla f|^2 dx \right),$$

pour toute fonction f régulière telle que $\int f^2 dx = 1$.

Ces inégalités sont importantes car elles permettent, en particulier, d'étudier la convergence et la régularité des diffusions

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu,$$

ou L est un opérateur différentiel linéaire. Si L admet une mesure réversible μ, deux cas se présentent : si μ est une mesure de probabilité alors les deux premières inégalités fonctionnelles fournissent un outil important pour la convergence à l'équilibre de la diffusion. Si μ n'est pas une mesure finie, par exemple la mesure de Lebesgue et L le laplacien, c'est alors la dernière inégalité qui fournit un précieux outil pour l'étude de la régularité du semi-groupe de la chaleur.

Même si ces inégalités sont connues depuis longtemps, de nombreuses zones d'ombre subsistent et nécessitent un travail de recherche. Ce mémoire traite essentiellement du lien entre les inégalités fonctionnelles et la convergence d'équations aux dérivées partielles mais de nombreuses études sont actuellement en cours, que ce soit en géométrie riemannienne, géométrie des convexes, convergence de chaînes de Markov, systèmes de particules ou en mécanique statistique.

Détaillons maintenant les différents thèmes de ce mémoire.

Version L^p de l'inégalité de Sobolev euclidienne

L'inégalité de Sobolev logarithmique euclidienne est très fortement reliée au semi-groupe de la chaleur. On utilise le fait que la mesure de Lebesgue est réversible par rapport au laplacien :

$$\int f\Delta g dx = -\int \nabla f\cdot\nabla g dx.$$

Ainsi l'étude de la régularité de diffusion plus générale comme le p-laplacien requière une inégalité d'ordre p. En effet, le p-laplacien est défini de la façon suivante :

$$\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right),$$

et celui-ci vérifie par suite $\int g\Delta_p g dx = -\int |\nabla f|^p dx$.

Dans le chapitre 1, nous établissons et étudions une inégalité de Sobolev logarithmique euclidienne d'ordre p. Ce type d'inégalités est relié à la régularité de semi-groupe de la chaleur dirigé par le p-laplacien mais aussi à la régularité des solutions de Hopf-Lax des équations de Hamilton-Jacobi.

Inégalités de Sobolev logarithmiques modifiées

Il est bien connu que la classe des mesures de probabilités qui satisfont une inégalité de Poincaré ou de Sobolev logarithmique est réduite. En particulier nous savons que ces inégalités impliquent de la concentration exponentielle pour la première et gaussienne pour la seconde.

Ainsi dans le chapitre 2, nous nous fixons une mesure de probabilité qui ne vérifie par forcément Sobolev logarithmique et nous cherchons l'inégalité fonctionnelle la plus adaptée à cette mesure. C'est dans ce sens que nous définissons *les inégalités de Sobolev logarithmiques modifiées*. Dans ces inégalités modifiées, le terme de gauche, c'est-à-dire l'énergie, a été changé, on considère alors :

$$\mathbf{Ent}_\mu\left(f^2\right) \leqslant \int H\left(\frac{\nabla f}{f}\right) f^2 d\mu,$$

où H est une fonction à définir, dépendant de μ.

Cette famille d'inégalités est pertinente pour établir des inégalités de concentration, ou des inégalités de transport pour des mesures log-concaves.

Inégalités de type capacité-mesure et applications

Pour prouver et étudier les inégalités fonctionnelles, un bon outil est les inégalités de type capacité-mesure, celle-ci sont bien détaillées dans [**Maz85**]. En effet, elles permettent d'élaborer une hiérarchie entre les inégalités et d'établir un critère pratique pour les établir dans le cas de la dimension 1.

Ainsi dans le chapitre 3 nous commençons par étudier l'inégalité de *Sobolev logarithmique faible*. Celle-ci est définie de la façon suivante :

$$\forall r > 0,\ \mathbf{Ent}_\mu\big(f^2\big) \leqslant \beta(r) \int |\nabla f|^2 d\mu + r\|f\|_\infty^2,$$

où β est une fonction décroissante positive sur $\mathbb{R}^{+*}$. Cette inégalité présente l'avantage d'être vérifiée pour presque toutes les mesures de probabilités, moyennant une adaptation de β en fonction de la mesure.

Nous obtenons dans la section 3.1 du chapitre 3 la convergence de diffusion en entropie au lieu de convergence en moyenne quadratique plus restrictive. Nous illustrons par des exemples le cas où seule l'entropie peut être utilisée, puisque la moyenne quadratique n'est pas définie.

De la même manière nous nous intéressons à la diffusion non linéaire suivante

$$u_t = L(u^m),$$

où $m \geqslant 1$ et L est un opérateur de diffusion admettant une mesure de probabilité μ comme mesure réversible. Cette équation est appelée *l'équation des milieux poreux à poids*. Nous étudions son existence et sa convergence à l'équilibre, cette dernière est reliée aux inégalités d'ordre q suivantes :

$$\big(\mathbf{Var}_\mu(f^q)\big)^{1/q} \leqslant C \int |\nabla f|^2 d\mu,$$

$$\Big(\mathbf{Ent}_\mu\big(f^{2q}\big)\Big)^{1/q} \leqslant C \int |\nabla f|^2 d\mu,$$

où $q \in]0,1[$. Ainsi nous menons dans la section 3.3, une étude de ces inégalités à l'aide des inégalités de type capacité-mesure. En particulier nous établissons le lien entre ces inégalités et d'autres plus connus et nous développons des critères pratiques permettant de les établir.

Méthodes entropiques pour des équations dissipatives

Dans le chapitre 4 nous traitons plusieurs cas de convergence à l'équilibre d'équations d'évolutions particulières.

Dans la section 4.1 nous traitons l'équation d'ordre 4 suivante

$$u_t + (u(\log u)_{xx})_{xx} = 0, \quad u(\cdot,0) = u_0 \geq 0 \quad \text{in } S^1,$$

où S^1 est le tore unidimensionnel. D'une part nous établissons l'existence de solutions, et d'autre part nous prouvons, à partir d'inégalités fonctionnelles d'ordre 2 (faisant intervenir la dérivée seconde), la décroissante exponentielle vers l'équilibre de la solution.

De façon plus générale, à partir de l'équation précédente et des deux modèles non-linéaires suivants

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (u^m)_{xx}\ , \quad x \in S^1\ , \quad t > 0\ ,$$

et

$$u_t = -(u^m\, u_{xxx})_x\ , \quad x \in S^1\ , \quad t > 0\ ,$$

nous cherchons à étudier la vitesse de convergence à l'équilibre. Nous montrons en particulier dans la section 4.2 que même si la décroissance est polynomiale au départ, elle est ensuite exponentielle comme pour les équations linéaires.

Dans la section 4.3 nous travaillons sur la convergence d'une équation de Fokker-Planck dirigée par le générateur infinitésimal noté $\mathcal{I}$, d'un processus de Lévy. La forme de l'équation est la suivante :

$$\partial_t u = \mathcal{I}[u] + \operatorname{div}(u \nabla V) \quad x \in \mathbb{R}^d, t > 0.$$

La particularité ici est que l'équation d'évolution est dirigée par un opérateur non-local.

A partir d'inégalités fonctionnelles non-locales, nous établissons la convergence exponentielle vers l'équilibre pour une large classe d'équations de Lévy-Fokker-Planck.

Toujours dans l'esprit des méthodes entropiques, nous cherchons à établir la convergence à l'équilibre de systèmes d'équations de réaction-diffusion provenant de la réaction chimique réversible suivante :

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \mathcal{A}_i \rightleftharpoons \sum_{i=1}^{q} \beta_i \mathcal{A}_i,$$

où les espèces $\mathcal{A}_i$ diffusent dans l'espace avant de réagir entre elles. Nous établissons comme dans le cas des réactions chimiques sans diffusions, sous une hypothèse de trou spectral pour la diffusion, l'existence d'une solution et la convergence exponentielle de celle-ci vers l'équilibre.

Filtrage non-linéaire et systèmes de particules en interaction

Le dernier chapitre traite d'un sujet différent des autres.

Nous définissons une suite de mesures définies de proche en proche à partir d'une chaîne de Markov. L'étude de ces suites est fondamentale car elles apparaissent dans les problèmes de filtrage. Cette suite de mesures étant souvent difficile à calculer explicitement, ainsi des algorithmes sont utilisés pour en déduire une approximation. Une bonne famille d'algorithmes est la famille des algorithmes génétiques, où l'on sélectionne à chaque itération du procédé un certain nombre de particules qui vont se reproduire avant de muter selon la chaîne ce Markov.

Dans le chapitre 5 nous travaillons sur une sélection particulière. Cette sélection est très intéressante car elle est presque déterministe et donc très rapide à simuler sur un ordinateur. Toutefois, son caractère quasi-déterministe a pour conséquence que la preuve de sa convergence est difficile à établir. Malheureusement nous n'obtenons pas le résultat final, nous établissons donc dans ce sens une conjecture vis-à-vis de la convergence.

Pour illustrer la conjecture, nous simulons un cas simple de problème de filtrage. Ce cas est intéressant car la suite de mesures utilisée peut être calculée explicitement, et donc la convergence de l'algorithme génétique peut donc être illustreé de façon numérique.

BIBLIOGRAPHIE PERSONNELLE

Thèse :

I. Gentil Inégalités de Sobolev logarithmiques et hypercontractivité en mécanique statistique et en E.D.P. *Université Toulouse III*, décembre 2001.

Articles publiés dans les revues avec comité de lecture :

1) C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, and G. Scheffer. *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, volume 10 of *Panoramas et Synthèses* . Société Mathématique de France, Paris, 2000. Avec uns préface de D. Bakry et M. Ledoux.
2) I. Gentil and C. Roberto. Spectral gaps for spin systems : some non-convex phase examples. *J. Funct. Anal.*, 180(1) :66–84, 2001.
3) S. G. Bobkov, I. Gentil, and M. Ledoux. Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 80(7) :669–696, 2001.
4) I. Gentil. Ultracontractive bounds on Hamilton-Jacobi solutions. *Bull. Sci. Math.*, 126(6) :507–524, 2002.
5) I. Gentil and F. Malrieu. Équations de Hamilton-Jacobi et inégalités entropiques généralisées. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 335(5) :437–440, 2002.
6) I. Gentil. The general optimal L^p-Euclidean logarithmic Sobolev inequality by Hamilton-Jacobi equations. *J. Funct. Anal.*, 202(2) :591–599, 2003.
7) M. Del Pino, J. Dolbeault, and I. Gentil. Nonlinear diffusions, hypercontractivity and the optimal L^p-Euclidean logarithmic Sobolev inequality. *J. Math. Anal. Appl.*, 293(2) :375–388, 2004.
8) I. Gentil, A. Guillin, and L. Miclo. Modified logarithmic Sobolev inequalities and transportation inequalities. *Probab. Theory Related Fields*, 133(3) :409–436, 2005.
9) I. Gentil, B. Rémillard, and P. Del Moral. Filtering of images for detecting multiple targets trajectories. In *Statistical modeling and analysis for complex data problems*, volume 1 of *GERAD 25th Anniv. Ser.*, pages 267–280. Springer, New York, 2005.
10) J. Dolbeault, I. Gentil, and A. Jüngel. A logarithmic fourth-order parabolic equation and related logarithmic Sobolev inequalities. *Commun. Math. Sci.*, 4(2) :275–290, 2006.
11) J. A. Carrillo, J. Dolbeault, I. Gentil, and A. Jüngel. Entropy-energy inequalities and improved convergence rates for nonlinear parabolic equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 6(5) :1027–1050 (electronic), 2006.

12) P. Cattiaux, I. Gentil, and A. Guillin. Weak logarithmic sobolev inequalities and entropic convergence. *Probab. Theory Related Fields*, 139(3-4) :563–603, 2007.
13) I. Gentil, A. Guillin, and L. Miclo. Modified logarithmic sobolev inequalities in null curvature. *Rev. Matematica Iberoamericana*, 23(1) :237–260, 2007.
14) J. Dolbeault, I. Gentil, A. Guillin, and F.Y. Wang. L^q-functional inequalities and weighted porous media equations. *Potential Anal.*, 28(1) :35–59, 2008.
15) I. Gentil. From the Prékopa-Leindler inequality to modified logarithmic sobolev inequality. *A paraître in Ann. Fac. Sci. Toulouse.*
16) I. Gentil and C. Imbert. The Lévy-Fokker-planck equation : Phi-entropies and convergence to equilibrium. *A paraître in Asymptot. Anal.*.
17) I. Gentil and B. Rémillard. Using systematic sampling selection for monte carlo solutions of feynman-kac equations. *A paraître in Advances in Applied Probability.*

Article en préparation :

1) I. Gentil and B. Zegarlinski. Asymptotic behaviour of a general reversible chemical reaction-diffusion equation. En préparation, 2008.

Rapports de recherche et proceeding :

1) I. Gentil and B. Rémillard. Filtering for detecting multiple targets trajectories on a one-dimensional torus. *Publication du GERAD*, 2003.
2) I. Gentil. Inégalités de sobolev logarithmique et de Poincaré pour la loi uniforme. *Note non publiée*, 2006.
3) I. Gentil and C. Imbert. Logarithmic Sobolev inequalities : regularizing effect of Lévy operators and asymptotic convergence in the Lévy-Fokker-Planck equation *Proceeding à A paraître.*

CHAPITRE 1

INÉGALITÉ DE SOBOLEV LOGARITHMIQUE EUCLIDIENNE ET APPLICATIONS

1.1. Lien avec les équations de Hamilton-Jacobi

Les résultats de cette section proviennent d'un article publié dans *Journal of Functional Analysis* en 2003 : [**Gen03**].

En 1978, F. B. Weissler prouve dans [**Wei78a**], l'inégalité de Sobolev logarithmique de type euclidien, c'est-à-dire pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Pour toute fonction assez régulière f, vérifiant $\int f^2 dx = 1$ on a :

$$\mathbf{Ent}_{dx}\left(f^2\right) = \int f^2 \log f^2 dx \leqslant \frac{n}{2} \log\left(\frac{2}{\pi n e}\int |\nabla f|^2 dx\right).$$

Notons qu'*une fonction régulière* est une fonctions telle que les termes des inégalités ont un sens. Par exemple dans le cas présent nous pouvons considérer les fonction dans l'espace $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. Cette notion sera utilisée dans la suite de ce mémoire.

Cette inégalité est très utile pour une étude fine des propriétés du semi-groupe de la chaleur. Elle est en fait équivalente à l'inégalité de Sobolev logarithmique pour la mesure Gaussienne, comme l'a démontré E. Carlen dans [**Car91**]. Il est naturel de se demander si une version dans les espaces L^p est possible. M. Del-Pino et J. Dolbeault proposent une réponse dans [**DPD03b**].

Soit $1 \leqslant p < n$ on obtient l'inégalité suivante :

$$\mathbf{Ent}_{dx}(|f|^p) = \int |f|^p \log |f|^p dx \leqslant \frac{n}{p} \log\left(\mathcal{L}_p \int |\nabla f|^p dx\right), \tag{1}$$

pour toute fonction f régulière telle que $\int |f|^p dx = 1$ et

$$\mathcal{L}_p = \frac{p}{n}\left(\frac{p-1}{e}\right)^{p-1} \pi^{-\frac{p}{2}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(n\frac{p-1}{p}+1\right)}\right)^{\frac{p}{n}}. \tag{2}$$

Cette inégalité est appelée *L^p-inégalité de Sobolev logarithmique euclidienne.* L'inégalité (1) pour $p = 1$ a été prouvée par W. Beckner dans [**Bec99**].

Ces inégalités sont optimales et les fonctions extrémales sont données par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ f(x) = \pi^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n\frac{p-1}{p}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(n\frac{p-1}{p}+1\right)} \exp\left(-\frac{1}{\sigma}|x-\overline{x}|^{\frac{p}{p-1}}\right),$$

où $\sigma > 0$ et $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$.

Dans [**Gen03**] nous proposons une extension de (1), c'est à dire où il n'y a pas de restriction pour le paramètre p, et où la norme L^p est plus générale.

Soit $C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ une fonction paire strictement convexe. On suppose qu'il existe $q > 1$ tel que C soit q-homogène, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\forall \lambda \geqslant 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n, \;\; C(\lambda x) = \lambda^q C(x). \tag{3}$$

Notons par C^*, sa transformée de Legendre. Il est clair dans ce cas que C^* est aussi une fonction paire et p-homogène, où $1/p + 1/q = 1$. Nous pouvons considérer par exemple la fonction suivante : $C(x) = \|x\|^q$, où $\|\cdot\|$ est une norme dans $\mathbb{R}^n$.

Ainsi nous obtenons :

Théorème 1.1.1. — *Soit $q > 1$ et $n > 0$, et notons par dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que $1/p + 1/q = 1$. Alors pour toute fonction régulière f à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\int |f|^p dx = 1$, on a*

$$\mathbf{Ent}_{dx}(|f|^p) = \int |f|^p \log\left(|f|^p\right) dx \leqslant \frac{n}{p} \log\left(\mathcal{L}_C \int C^*(\nabla f)dx\right), \tag{4}$$

où

$$\mathcal{L}_C = \frac{p^{p+1}}{n e^{p-1} \left(\int e^{-C(x)} dx\right)^{p/n}}.$$

L'inégalité (4) *est optimale et les fonctions suivantes*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \;\; f(x) = a \exp\left(-bC(x - \overline{x})\right), \tag{5}$$

où $a^{-p} = \int \exp\left(-pbC(x - \overline{x})\right) dx$ sont des fonctions extrémales.

Remarque 1.1.2. — *Ce théorème est bien une généralisation de l'inégalité* (1)*, il suffit pour s'en rendre compte de poser $C(x) = \frac{1}{q}|x|^q$ avec $1/p + 1/q = 1$.*

Ainsi la généralisation par rapport à [**DPD03b**] *concerne d'une part la fonction C, et d'autre part l'ensemble des valeurs possibles du paramètre p.*

La preuve du théorème 1.1.1 s'appuie sur un autre résultat de régularité des équations de Hamilton-Jacobi : Soit g une fonction régulière dans $\mathbb{R}^n$ (par exemple lipschitzienne), définissons l'opérateur $\left(\mathbf{Q}_t^{(C)}\right)_{t \geqslant 0}$ par

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_t^{(C)} g(x) &= \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ g(y) + tC\left(\dfrac{x-y}{t}\right) \right\}, \quad t > 0, \, x \in \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{Q}_0^{(C)} g(x) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{6}$$

Il est bien connu que $\mathbf{Q_t}^{(C)} g(x)$ est la solution de Hopf-Lax de l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) + C^*(\nabla v(x,t)) &= 0, \quad t > 0, \, x \in \mathbb{R}^n, \\ v(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{7}$$

Ces équations sont largement décrites dans [**Bar94**] and [**Eva98**]. Nous obtenons alors :

Théorème 1.1.3. — *Soit $n > 0$. On suppose que $1/p + 1/q = 1$. Alors pour toute fonction g régulière dans $\mathbb{R}^n$, $\beta \geqslant \alpha > 0$, $t > 0$ on a*

$$\left\| e^{\mathbf{Q_t}^{(C)} g} \right\|_\beta \leqslant \|e^g\|_\alpha \left(\frac{\beta - \alpha}{t} \right)^{\frac{n}{p}\frac{\beta-\alpha}{\beta\alpha}} \frac{\alpha^{\frac{n}{\beta\alpha}\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}\right)}}{\beta^{\frac{n}{\beta\alpha}\left(\frac{\beta}{p}+\frac{\alpha}{q}\right)}} \left(\frac{1}{\int e^{-C(x)} dx} \right)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta\alpha}}, \tag{8}$$

où $\|\cdot\|_\beta$ est la norme L^β associée à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$.

L'inégalité (8) *est optimale, et l'égalité est obtenue pour $0 < \alpha \leqslant \beta$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, $b > 0$ avec*

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad g(x) = -bC(x - \overline{x}) \\ t = \dfrac{\beta - \alpha}{b^{p/q}\beta}. \end{cases}$$

De plus, lorsque $\beta = \infty$ et $\alpha = 1$, on obtient une borne ultracontractive *pour $\left(\mathbf{Q}_t^{(C)}\right)_{t \geqslant 0}$: Pour toute fonction g régulière,*

$$\left\| e^{\mathbf{Q_t}^{(C)} g} \right\|_\infty \leqslant \|e^g\|_1 \left(\frac{1}{t} \right)^{\frac{n}{p}} \frac{1}{\int e^{-C(x)} dx},$$

avec égalité si $t = (1/b)^{p/q}$ et $g(x) = -bC(x)$.

Les liens entre la régularité des équations de Hamilton-Jacobi et la majoration de l'entropie montrent que les inégalités (4) et (8) sont équivalentes. Ainsi les deux théorèmes 1.1.1 et 1.1.3 se déduisent l'un de l'autre. Le plus naturel à démontrer est le théorème 1.1.3, il s'obstient directement en utilisant l'inégalité de Prékopa-Leindler qui est une forme fonctionnelle de l'inégalité de Brunn-Minkowski.

Plus précisément, soit a, b deux nombres réels strictement positifs tels que $a+b = 1$. Soient trois fonctions positives dans $\mathbb{R}^n$, u, v, w. Supposons que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$u(x)^a v(y)^b \leqslant w(ax + by),$$

alors

$$\left(\int u dx \right)^a \left(\int v dx \right)^b \leqslant \int w dx. \tag{9}$$

L'inégalité (9) appliquée aux fonctions caractéristiques d'ensembles donnent la forme multiplicative de l'inégalité de Brunn-Minkowski

$$vol(A)^a vol(B)^b \leqslant vol(aA + bB),$$

où $aA + bB = \{ax_A + bx_B,\ x_A \in A, x_B \in B\}$ et $vol(A)$ est le volume par rapport à la mesure de Lebesgue de l'ensemble A. Une belle introduction est présentée par B. Maurey dans [**Mau05**].

1.2. Applications à des diffusions non linéaires

Les résultats de cette section proviennent d'un article écrit en collaboration avec Manuel Del Pino et Jean Dolbeault publié dans *Journal of Mathematical Analysis and Applications* en 2004 : [**DPDG04**].

Si l'inégalité de Sobolev logarithmique de type euclidien est utile pour dégager des propriétés du semi-groupe de la chaleur, la version dans les espaces L^p va nous permettre de prouver des propriétés de régularité de diffusions non-linéaires de type p-laplacien.

Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial_t u}{\partial t} = \Delta_p\big(u^{1/(p-1)}\big) & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u(\cdot, t=0) = f(\cdot) \end{cases} \tag{10}$$

où f est une donnée initiale positive et $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$.

Notons que $\Delta_p u^m$ est homogène de degré 1 si et seulement si $m = 1/(p-1)$.

Si l'étude de l'équation (10) est fortement reliée aux inégalités de Sobolev logarithmiques euclidiennes dans les espaces L^p, l'équation $u_t = \Delta_p u^m$, avec $m \neq 1/(p-1)$, est quant à elle fortement reliée aux inégalités de Gagliardo-Nirenberg. Ceci a été étudié par M. Del Pino et J. Dolbeault dans [**DPD02a, DPD02b, DPD03a**]. Le cas limite des inégalités de Gagliardo-Nurenberg, lorsque $m \to 1/(p-1)$, redonne (1) avec les restriction sur le paramètre p.

Notons par $\|u\|_p$, $p \neq 0$ la norme suivante $(\int |u|^p\, dx)^{1/p}$ sur $\mathbb{R}^n$. Notons aussi par $p^* = p/(p-1)$ l'exposent conjugué de p, si $p \in (1, +\infty)$.

Le premier théorème est un résultat d'existence.

Théorème 1.2.1. — *Soient $p > 1$ et f une fonction positive dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $|x|^{p^*} f$ et $f \log f$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Alors il existe une unique solution faible $u \in C(\mathbb{R}_t^+, L^1(\mathbb{R}_x^n))$ de l'équation (10) *avec une condition initiale f, telle que $u^{1/p} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_t^+, W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_x^n))$.*

Le résultat concernant la régularité est la propriété *d'hypercontractivité* suivante :

Théorème 1.2.2. — *Soient α, $\beta \in [1, +\infty]$ avec $\beta \geqslant \alpha$. Sous les hypothèses du théorème 1.2.1, si de plus $f \in L^\alpha(\mathbb{R}^n)$, les solutions de l'équation* (10) *avec une condition initiale égale à f vérifient l'estimation optimale suivante*

$$\|u(\cdot,t)\|_\beta \leqslant \|f\|_\alpha\, A(n,p,\alpha,\beta)\, t^{-\frac{n}{p}\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}} \quad \forall\, t > 0$$

avec

$$A(n,p,\alpha,\beta) = (\mathcal{C}_1\,(\beta-\alpha))^{\frac{n}{p}\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}}\, \mathcal{C}_2^{\frac{n}{p}} \ ,$$

$$\mathcal{C}_1 = n\,\mathcal{L}_p\, e^{p-1}\, \frac{(p-1)^{p-1}}{p^{p+1}} \ , \quad \mathcal{C}_2 = \frac{(\beta-1)^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{(\alpha-1)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}\, \frac{\beta^{\frac{1-p}{\beta}-\frac{1}{\alpha}+1}}{\alpha^{\frac{1-p}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+1}} \ , \tag{11}$$

où la constante $\mathcal{L}_p$ est donnée par l'équation (2).

Notons que dans le cas $p = 2$, avec $\mathcal{L}_2 = \frac{2}{\pi\, n\, e}$, nous retrouvons les résultats classiques des estimés du semi-groupe de la chaleur (on pourra consulter par exemple [**Var85, Led00, Gen02**]).

Dans un cas particulier du théorème 1.2.2 nous obtenons un résultat *d'ultracontractivité* lorsque l'on fait tendre α vers 1 et β vers $+\infty$:

Corollaire 1.2.3. — *Considérons une solution u de* (10) *avec une condition initiale positive $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant les mêmes hypothèses que le théorème 1.2.1 avec $\alpha = 1$.*

Alors pour tout $t > 0$, on a :

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \left(\frac{\mathcal{C}_1}{t}\right)^{\frac{n}{p}} ,$$

où $\mathcal{C}_1$ *est définie par l'équation* (11).

1.3. Conclusion, remarques et extensions

Nous pouvons résumer les articles [**Gen03, DPDG04**] par l'équivalence entre ces 3 estimations :

– Pour tout $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ avec $\int |w|^p\, dx = 1$,
$$\int |w|^p \log |w|\, dx \leq \frac{n}{p^2} \log \left[\mathcal{L}_p \int |\nabla w|^p\, dx \right] .$$
– Avec la notation P_t^p appliquée pour le semi-groupe associé à (10), *i.e.* $u_t = \Delta_p\big(u^{1/(p-1)}\big)$,
$$\|P_t^p f\|_\beta \leqslant \|f\|_\alpha\, A(n,p,\alpha,\beta)\, t^{-\frac{n}{p}\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}} .$$
– Avec les notations Q_t^p pour le semi-groupe associé à (7), *i.e.* le cas particulier suivant $v_t + \frac{1}{p}|\nabla v|^p = 0$,
$$\|e^{Q_t^p g}\|_\beta \leqslant \|e^g\|_\alpha\, B(n,p,\alpha,\beta)\, t^{-\frac{n}{p}\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}} .$$

Remarque 1.3.1. — *1) Les premiers liens entre les inégalités de Sobolev logarithmiques et les équations de Hamilton-Jacobi proviennent d'un article écrit en collaboration avec S. Bobkov et M. Ledoux,* [**BGL01**]. *Ensuite celui-ci a été étendu pour l'inégalité de Sobolev logarithmique euclidienne, lorsque* $C(x) = |x|^2/2$, *dans* [**Gen02**].

2) Les résultats de la section 1.1 sont dans une large mesure généralisables dans le cas d'une variété riemannienne. En particulier l'équivalence entre les inégalités (4) *et* (8) *est encore vraie indépendamment de leurs existences.*

3) Notons de plus que l'inégalité (1) *obtenue par M. Del-Pino et J. Dolbeault a aussi été démontrée par D. Cordero-Eurausquin, B. Nazaret et C. Villani dans* [**CENV04**]. *Ils utilisent des méthodes de transport de masse.*

M. Agueh, N. Ghoussoub et X. Kang dans [**AGK04**], *généralisent ces méthodes de transport de masse pour établir une famille d'inégalités fonctionnelles. En particulier ils démontrent, de manière indépendante, l'inégalité* (4).

Ces méthodes ont été largement utilisées dans d'autres cas, comme par exemple pour l'étude de la stabilité de l'équation d'évolution non linéaire
$$u_t = \Delta_p(u^m),$$
pour différentes valeurs du paramètre m, dans $\mathbb{R}^n$ ou dans une variété riemannienne (voir [**BG06, BCG03**]).

De façon générale, pour étudier la régularité de cette équation non linéaire il nous faut démontrer une inégalité de Sobolev logarithmique euclidienne mais non homogène, du type
$$\int |w|^\alpha \log |w|^\alpha\, dx \leq C \log \left[C_{\alpha,\beta} \int |\nabla w|^\beta\, dx \right],$$
pour toute fonction w vérifiant : $\int |w|^\alpha dx = 1$ pour des paramètres α et β. Ce genre d'inégalité est difficile à obtenir, comme nous pouvons le constater dans le chapitre 3. Ce travail est en cours d'élaboration avec Matteo Bonforte.

Dans un travail en cours avec Bruno NAZARET, nous nous intéressant aux liens entre les inégalités de Sobolev logarithmiques à trace développées dans [**Naz06**], le résultat fondamental de cet article est la généralisation dans L^p de l'inégalité à trace suivante

$$\|f\|_{\frac{(n-1)2}{n-2}(\partial\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \|\nabla f\|_2^2\right)^{1/2},$$

pour une certaine constante C.

La méthode utilisée est reliée au transport optimal, comme c'est le cas des inégalités Sobolev dans $\mathbb{R}^n$ ou des inégalités de Gagliardo-Nirenberg. Le lien entre ces méthodes et celles développées dans ce chapitre étant très important, nous essayons d'utiliser la solution de Hopf-Lax des équations de Hamilton-Jacobi dans ce cadre-là.

CHAPITRE 2

INÉGALITÉS DE SOBOLEV LOGARITHMIQUES MODIFIÉES ET APPLICATIONS

Une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^n$ satisfait à l'inégalité de Sobolev logarithmique s'il existe une constante $C \in \mathbb{R}^+$ telle pour toute fonction régulière f sur $\mathbb{R}^n$ on a

$$\mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leqslant C \int |\nabla f|^2 d\mu, \tag{12}$$

où

$$\mathbf{Ent}_\mu(f^2) = \int f^2 \log f^2 d\mu - \int f^2 d\mu \log \int f^2 d\mu$$

et $|\nabla f|$ est la norme euclidienne du gradient ∇f de f.

L. Gross dans [**Gro75**] montre que la mesure gaussienne canonique dans $\mathbb{R}^n$ de densité $(2\pi)^{-n/2}e^{-|x|^2/2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue vérifie une telle inégalité avec une constante optimale $C = 2$.

Soit $\alpha \geqslant 1$ et définissons la mesure de probabilité μ_α sur $\mathbb{R}$ par

$$\mu_\alpha(dx) = \frac{1}{Z_\alpha} e^{-|x|^\alpha} dx, \tag{13}$$

où $Z_\alpha = \int e^{-|x|^\alpha} dx$. Il est bien connu que μ_α satisfait à l'inégalité de Sobolev logarithmique (12) si et seulement si $\alpha \geqslant 2$.

Ainsi pour $\alpha \in [1, 2[$, même si la mesure μ_α ne satisfait pas à cette inégalité elle vérifie l'inégalité de Poincaré (appelée aussi inégalité de trou spectral) : pour toute fonction f assez régulière

$$\mathbf{Var}_{\mu_\alpha}(f) \leqslant C \int |\nabla f|^2 d\mu_\alpha, \tag{14}$$

où $\mathbf{Var}_{\mu_\alpha}(f) = \int f^2 d\mu_\alpha - \left(\int f d\mu_\alpha\right)^2$ et $0 \leqslant C$.

Rappelons tout d'abord, voir par exemple la section 1.2.6 de [**ABC$^+$00**], que si une mesure de probabilité vérifie l'inégalité de Sobolev logarithmique avec une constante C elle satisfait alors à l'inégalité de Poincaré avec une constante inférieure à $C/2$.

On se pose donc deux problèmes naturels. Puisque lorsque $\alpha \in [1, 2]$, μ_α vérifie l'inégalité de Poincaré, ces mesures ne sont *pas loin* de vérifier l'inégalité de Sobolev logarithmique. Ainsi on peut se poser la question suivante : peut-on trouver une inégalité de Sobolev logarithmique adaptée aux mesures μ_α ? Bien entendu cette inégalité serait plus faible.

De plus, lorsque $\alpha > 2$, les mesures μ_α se concentrent mieux que la mesure gaussienne. De la même manière, peut-on trouver une inégalité adaptée à ces mesures ? Et bien entendu, dans ce cas cette inégalité serait plus forte que l'inégalité de Sobolev logarithmique.

L'intérêt d'obtenir ces généralisations est de pouvoir utiliser les propriétés de l'inégalité de Sobolev logarithmique aux mesures μ_α tout en gardant leurs spécificités.

2.1. Cas sous-gaussien

Les résultats de cette section proviennent de deux articles écrits en collaboration avec Arnaud Guillin et Laurent Miclo, parus dans *Probability Theory and Related Fields* et *Revista Matematica Iberoamericana* en 2005 et 2007 : [**GGM05, GGM07**].

Le premier cas qui nous intéresse est le cas sous-gaussien ; L'inégalité de Gross n'est pas satisfaite contrairement à l'inégalité de Poincaré (14).

Nous traitons un cas plus général que les mesures μ_α. Intéressons nous à des mesures qui sont log-concave ayant une concentration comprise entre $e^{-|x|}$ et e^{-x^2}. Plus précisément, soit Φ une fonction sur $\mathbb{R}$, on dit que Φ vérifie la propriété (**H**) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

– Φ est de classe $\mathcal{C}^2$, paires et strictement convexe sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi''(x) > 0$.
– De plus il existe $M > 0$ et $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$ tels que $\Phi(M) > 0$ et
$$\forall x \geqslant M, \quad (1+\varepsilon)\Phi(x) \leqslant x\Phi'(x) \leqslant (2-\varepsilon)\Phi(x).$$

Nous supposerons dans cette sous-section 2.1 que la fonction Φ sur $\mathbb{R}$ vérifie l'hypothèse (**H**).

L'hypothèse (**H**) nous assure que la fonction Φ est entre $|x|$ et x^2. En effet cette hypothèse implique qu'il existe $m_1, m_2 > 0$ telles que
$$\forall x \geqslant M, \quad m_1 x^{1/(1-\varepsilon)} \leqslant \Phi(x) \leqslant m_2 x^{2-\varepsilon}.$$

Ainsi, on sait que $\int e^{-\Phi(x)}dx < \infty$ et on peut définir la mesure de probabilité μ_Φ sur $\mathbb{R}$ par
$$\mu_\Phi(dx) = \frac{1}{Z_\Phi} e^{-\Phi(x)}dx,$$
où $Z_\Phi = \int e^{-\Phi(x)}dx$.

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

Théorème 2.1.1. — *Supposons que Φ vérifie l'hypothèse* (**H**) *alors il existe des constantes $A, A', B, D \geqslant 0$ et $\kappa > 0$ telles que pour toute fonction f assez régulière positive et vérifiant $\int f^2 d\mu_\Phi = 1$ on a*
$$\mathbf{Ent}_{\mu_\Phi}\left(f^2\right) \leqslant A\mathbf{Var}_{\mu_\Phi}(f) + A'\int_{f^2 \geqslant \kappa} H_\Phi\left(\frac{f'}{f}\right) f^2 d\mu_\Phi, \tag{15}$$
où
$$H_\Phi(x) = \begin{cases} x^2 & si\ |x| < D, \\ \Phi^*(Bx) & si\ |x| \geqslant D, \end{cases} \tag{16}$$
et Φ^* est la transformée de Legendre-Fenchel de Φ, $\Phi^*(x) := \sup_{y\in\mathbb{R}} \{x \cdot y - \Phi(y)\}$.

Sachant que la mesure μ_Φ vérifie l'inégalité de Poincaré ainsi nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.2. — *Soit Φ vérifiant les propriétés du théorème 2.1.1. Alors il existe $A, B, D \geqslant 0$ tels que pour toute fonction assez régulière $f > 0$ on a*

$$\mathbf{Ent}_{\mu_\Phi}(f^2) \leqslant A \int H_\Phi\left(\frac{f'}{f}\right) f^2 d\mu_\Phi, \tag{17}$$

où H_Φ a été définie par (16). *Cette inégalité est appelée inégalité de* Sobolev logarithmique modifiée*.*

La propriété de tensorisation, classique et fondamentale pour les inégalités de type Sobolev logarithmique, est encore valable pour l'inégalité (17).

Corollaire 2.1.3. — *Si μ_Φ vérifiée l'inégalité de Sobolev logarithmique modifiée* (17)*, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la mesure de probabilité $\mu_\Phi^{\otimes n}$ sur $\mathbb{R}^n$ vérifie l'inégalité (ISLM) pour toute fonction régulière $f > 0$,*

$$\mathbf{Ent}_{\mu_\Phi}(f^2) \leqslant A \int H_\Phi\left(\frac{\nabla f}{f}\right) f^2 d\mu_\Phi, \tag{$ISLM$}$$

où

$$H_\Phi\left(\frac{\nabla f}{f}\right) := \sum_{i=1}^n H_\Phi\left(\frac{\partial_i f}{f}\right).$$

La preuve se décompose en deux étapes selon si l'entropie est petite ou grande. Dans ces deux cas, les preuves s'appuient sur l'inégalité de Hardy que nous rappelons maintenant.

Soit μ, ν deux mesures de Borel sur $\mathbb{R}^+$. Soit $A \in [0, +\infty]$ la meilleur constante telle que pour toute fonction f régulière :

$$\int_0^\infty (f(x) - f(0))^2 d\mu(x) \leqslant A \int_0^\infty f'^2 d\nu. \tag{18}$$

Définissons la constante B par

$$B = \sup_{x>0} \left\{ \mu([x, \infty[) \int_0^x \left(\frac{d\nu^{ac}}{dt}\right)^{-1} dt \right\}, \tag{19}$$

où ν^{ac} est la partie absolument continue de ν par rapport à μ. Alors A est finie si et seulement si B est finie, et de plus nous avons

$$B \leqslant A \leqslant 4B.$$

On pourra consulter [**Muc72, BG99, ABC$^+$00**] à ce sujet.

Un exemple particulièrement étudié dans [**GGM05**] est le cas des mesures μ_α définies en (13). Ce cas est intéressant car nous pouvons définir les fonctions H_Φ, définies en (16), d'une façon particulière. Nous prouvons aussi un lien avec les inégalités de Sobolev logarithmiques modifiées et les inégalités de transport.

Soit $\alpha \in [1, 2]$, et $\beta \geqslant 2$ vérifiant $1/\alpha + 1/\beta = 1$ et soit $a > 0$. Définissons les fonctions $L_{a,\alpha}$ et $H_{a,\alpha}$.

Si $\alpha \in]1,2]$ notons

$$L_{a,\alpha}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{si } |x| \leqslant a \\ a^{2-\alpha}\dfrac{|x|^\alpha}{\alpha} + a^2\dfrac{\alpha-2}{2\alpha} & \text{si } |x| \geqslant a \end{cases},$$

et

$$H_{a,\alpha}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{si } |x| \leqslant a \\ a^{2-\beta}\dfrac{|x|^\beta}{\beta} + a^2\dfrac{\beta-2}{2\beta} & \text{si } |x| \geqslant a \end{cases}.$$

Si $\alpha = 1$, notons

$$L_{a,1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{si } |x| \leqslant a \\ a|x| - \dfrac{a^2}{2} & \text{si } |x| \geqslant a \end{cases} \quad \text{et } H_{a,1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{si } |x| \leqslant a \\ \infty & \text{si } |x| > a \end{cases}.$$

Théorème 2.1.4. — *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$, on suppose que μ vérifie l'inégalité de Sobolev logarithmique modifiée suivante*

$$(LSI_{a,\alpha}(C)) \qquad \mathbf{Ent}_\mu\left(f^2\right) \leqslant C \int H_{a,\alpha}\left(\frac{\nabla f}{f}\right) f^2 d\mu,$$

où

$$H_{a,\alpha}\left(\frac{\nabla f}{f}\right) = \sum_{i=1}^n H_{a,\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{1}{f}\right).$$

Alors μ vérifie l'inégalité de transport

$$(T_{a,\alpha}(C)) \qquad T_{L_{a,\alpha}}(Fd\mu, d\mu) \leqslant C\mathbf{Ent}_\mu(F),$$

où

$$T_{L_{a,\alpha}}(Fd\mu, \mu) = \inf\left\{\int L_{a,\alpha}(x-y)d\pi(x,y)\right\},$$

et l'infimum est pris sur l'ensemble des mesures de probabilités π sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ telles que π a deux marginales $Fd\mu$ and μ.

La démonstration de ce théorème s'appuie sur des techniques de semi-groupes connectées à des équations de Hamilton-Jacobi.

Notons de plus qu'une réciproque partielle du théorème 2.1.4 est aussi proposée dans [**GGM05**].

2.1.1. Remarques. — Notons que F. Barthe, P. Cattiaux et C. Roberto dans [**BCR06**] ont aussi étudié ces mêmes mesures, mais avec une approche différente. Ils prouvent que les mesures μ_Φ vérifient une inégalité modifiée proche des inégalités démontrées par W. Beckner dans [**Bec89**] et généralisées par R. Latala et K. Oleskiewicz dans [**LO00**]. Leur approche consiste à garder l'énergie classique et à adapter l'entropie à la mesure étudiée.

2.2. Cas sur-gaussien et mesures log-concaves

Les résultats présentés ici sont à paraître dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* : [**Gen08**].

On s'intéresse dans cette partie au cas des mesures log-concaves, c'est-à-dire des mesures μ_Φ pour Φ fonction concave. Le cas présenté ici est multidimensionnel.

Le théorème général est le suivant :

Théorème 2.2.1. — *Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ strictement convexe, telle que*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\varphi(x)}{\|x\|} = \infty. \tag{20}$$

Notons par

$$d\mu_\varphi(x) = e^{-\varphi(x)}dx \tag{21}$$

la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$, (on suppose ici que $\int e^{-\varphi(x)}dx = 1$). Supposons de plus que μ_φ vérifie pour tout $R > 0$,

$$\int (\|z\| + \|y_0\| + R)^2 \left(\|\nabla\varphi(z)\| + \sup_{y;\, \|y-z+y_0\|\leqslant R} \|Hess(\varphi)(y)\| \right) d\mu_\varphi(z) < +\infty, \tag{22}$$

où y_0 vérifie $\|\nabla\varphi(y_0)\| \leqslant \|\nabla\varphi(z)\| + R$.

Si φ^* est la transformée de Legendre-Fenchel de φ, $\varphi^*(x) := \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \{x \cdot z - \varphi(z)\}$, alors pour tout fonction régulière g sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$\mathbf{Ent}_{\mu_\varphi}(e^g) \leqslant \int \{x \cdot \nabla g(x) - \varphi^*(\nabla\varphi(x)) + \varphi^*(\nabla\varphi(x) - \nabla g(x))\} e^{g(x)} d\mu_\varphi(x). \tag{23}$$

Ce théorème est une amélioration des résultats de S. Bobkov et M. Ledoux dans [**BL00**]. Ils utilisent l'inégalité de Prékopa-Leindler détaillée, dans la section 1.1, pour obtenir des inégalités de Brascamp-Lieb, Sobolev logarithmique ou alors de transport. L'inégalité (23) que nous obtenons, nous permet de retrouver les résultats de [**BL00**] ainsi que d'autres résultats que nous mentionnons ici.

De manière naturelle nous pouvons obtenir des inégalités de Sobolev logarithmiques pour des mesures plus concentrées que la mesure gaussienne. Comme cela était annoncé au début de la section 2, nous proposons une inégalité adaptée aux mesures μ_α, définies en (13), avec $\alpha > 2$. La méthode basée sur les inégalités de Hardy, proposée dans la sous-section 2.1, ne s'applique pas dans ce cas. Le théorème (2.2.1) permet en revanche d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 2.2.2. — *Soit φ une fonction à valeurs réelles satisfaisant les conditions du théorème 2.2.1. Supposons de plus que φ est paire, $\varphi(0) = 0$, φ'' est décroissante sur $]-\infty, 0]$, croissante $[0, +\infty[$ et satisfait,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi''(x) \geqslant \varphi''(0) = \lambda > 0 \text{ et } \lim_{|x|\to\infty} \varphi''(x) = \infty. \tag{24}$$

Supposons aussi qu'il existe $A > 1$ et $A' > 0$ telle que pour tout $|x| \geqslant A'$,

$$A\varphi(x) \leqslant x\varphi'(x). \tag{25}$$

Alors il existe $C > 0$ telle que pour toute fonction régulière g,

$$\mathbf{Ent}_{\mu_\varphi}(e^g) \leqslant \int H_\varphi(g')e^g d\mu_\varphi, \tag{26}$$

où

$$H_\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{2A}{A-1}\varphi^*\Big(\dfrac{x}{2}\Big), & si \quad |x| > C \\ \dfrac{1}{2\lambda}x^2, & si \quad |x| \leqslant C. \end{cases} \tag{27}$$

Nous voyons que, contrairement aux inégalités de Hardy, le théorème 2.2.1 permet d'obtenir une version multidimensionnelle de l'inégalité de Sobolev logarithmique modifiée (26).

Proposition 2.2.1. — *Soit Φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, strictement convexe, paire sur $\mathbb{R}^n$ et satisfaisant (20) et (22). Supposons de plus que $\Phi \geqslant 0$, $\Phi(0) = 0$ (ceci implique que 0 est l'unique minimum de Φ),*

$$\lim_{\alpha\to 0,\, \alpha\in[0,1]} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ (1-\alpha)\frac{\Phi^*\big(\frac{x}{1-\alpha}\big)}{\Phi^*(x)} \right\} = 1, \tag{28}$$

et qu'il existe $A > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x \cdot \nabla\Phi(x) \leqslant (A+1)\Phi(x). \tag{29}$$

Alors il existe $C_1, C_2, C_3 \geqslant 0$ telles que pour toute fonction régulière g telle que $\int e^g d\mu_\Phi = 1$ on a

$$\mathbf{Ent}_{\mu_\Phi}(e^g) \leqslant C_1 \int \Phi^*(C_2\nabla g)e^g d\mu_\Phi + C_3. \tag{30}$$

L'inégalité ainsi obtenue est une version n-dimensionnelle de (26). Notons que celle-ci n'est toutefois pas une inégalité tendue, dans le sens que si g est une constante, l'inégalité (30) n'est pas une égalité.

Notons pour finir que le théorème 2.2.1 permet d'obtenir à nouveau les inégalités de Sobolev logarithmiques euclidiennes :

Théorème 2.2.3. — *Supposons que la fonction φ vérifie les conditions du théorème 2.2.1. Alors pour tout $\lambda > 0$ et pour toute fonction g assez régulière sur $\mathbb{R}^n$,*

$$\mathbf{Ent}_{dx}(e^g) \leqslant -n\log(\lambda e) \int e^g dx + \int \varphi^*(-\lambda\nabla g)e^g dx. \tag{31}$$

Cette inégalité est optimale dans le sens que si $g = -\varphi(x-\bar{x})$ avec $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda = 1$ nous obtenons une égalité.

Lorsque φ est q-homogène (comme dans les hypothèses du théorème 1.1.1), une optimisation sur le paramètre λ permet de retrouver l'inégalité (4) du théorème 1.1.1.

2.3. Applications aux inégalités de concentration

Une propriété importante de ces inégalités de Sobolev logarithmiques modifiées mis en valeur dans [**GGM05, GGM07, Gen08**] est la concentration. En effet, le corollaire 2.1.3 prouve que ces inégalités se tensorisent et ainsi nous obtenons des inégalités de type Hoeffding.

Corollaire 2.3.1. — *Soit Φ vérifiant les hypothèses du théorème 2.1.1 ou du théorème 2.2.2.*

Il existe des constantes $A, B, D \geqslant 0$ telles que pour tout $n \geqslant 0$, toute fonction f lipschitzienne vérifiant $\|f\|_{Lip} \leqslant 1$ et $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi μ_Φ, alors

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} f(X_k) - \mu(f)\right| > \lambda\right) \leqslant \begin{cases} 2\exp\left(-nA\Phi(B\lambda)\right) & \text{if } \lambda \geqslant D, \\ 2\exp\left(-nA\lambda^2\right) & \text{if } 0 \leqslant \lambda \leqslant D, \end{cases}$$

ou de façon équivalente,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{k=1}^{n} f(X_k) - \mu(f)\right| > \lambda\right) \leqslant \begin{cases} 2\exp\left(-nA\Phi\left(B\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)\right) & \text{if } \lambda \geqslant D\sqrt{n}, \\ 2\exp\left(-A\lambda^2\right) & \text{if } 0 \leqslant \lambda \leqslant D\sqrt{n}. \end{cases}$$

On retrouve dans ces inégalités le caractère gaussien de $\frac{1}{\sqrt{n}}(\sum_{k=1}^{n} f(X_k) - \mu(f))$ lorsque n est assez grand. Ce résultat n'est pas nouveau, on pourra consulter par exemple l'article de M. Talagrand [**Tal95**], mais l'utilisation d'inégalités de ce type l'est.

2.4. Remarques et extensions

Les inégalités de Sobolev logarithmiques modifiées ont depuis été largement étudiées. Elles sont caractérisées sur $\mathbb{R}$ dans [**BR07**] ou alors sur $\mathbb{R}^n$ dans [**Kol07**]. D'autres applications avec les inégalités de transport ont aussi été montrées dans [**Goz07**]. L'élaboration de telles inégalités n'est pas encore évidentes en dimension n. Et qu'en est-il en dimension infinie ? En particulier les méthodes utilisées dans [**BZ05**] par S. Bobkov et B. Zegarlinski peuvent être appliquées pour démontrer une inégalité de Sobolev logarithmique modifiée pour des mesure de Gibbs.

La vitesse de convergence d'un semi-groupe de Markov repose sur des inégalités fonctionnelles. La dérivée de l'entropie le long des trajectoires fait apparaître l'énergie et non l'énergie modifiée. Il faudrait donc essayer de construire des inégalité de type Entropie-Energie de la forme :

$$\mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leqslant \int f^2 d\mu\, \Phi\left(\frac{\int |\nabla f|^2 d\mu}{\int f^2 d\mu}\right),$$

avec une fonction Φ adaptée à la mesure μ.

Ce genre d'inégalité a été étudié pour les mesures μ_α lorsque $\alpha \geqslant 2$. La fonction φ obtenue est alors concave (on pourra consulter [**BCL97**]) et les inégalités qui en découles sont dans ce cas plus faibles que les inégalités de Sobolev logarithmiques modifiées obtenues dans ce cas. Ainsi le cas intéressant est par exemple celui des mesures μ_α avec $\alpha \in [1, 2[$, la fonction Φ devant alors être convexe, ce qui rend le problème beaucoup plus difficile. Actuellement un travail est en cours pour affirmer ou infirmer ceci pour la mesure μ_1.

CHAPITRE 3

INÉGALITÉS CAPACITÉ-MESURES ET APPLICATIONS

Les inégalités de type capacité-mesure ont été introduite par Maz'ya en particulier dans [**Maz85**]. Depuis elles ont été largement étudiées dans le contexte des inégalités fonctionnelles comme Poincaré ou Sobolev logarithmique, on peut se référer par exemple [**BR03, Che05, BCR05, BCR06, BCR07**]. Les méthodes utilisées sont aussi très proches de celles de [**BCLSC95**] dans le cadres des inégalités de Sobolev.

Dans cette section, M est une variété riemanienne. Soit ν une mesure positive sur M. Alors pour tout ensemble mesurable $A \subset \Omega$ on définit sa capacité par rapport à ν par :

$$Cap_\nu(A,\Omega) := \inf\left\{\int |\nabla f|^2 d\nu;\ \mathbb{1}_A \leqslant f \leqslant \mathbb{1}_\Omega\right\},$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des fonctions $f \in H^1(M,\nu)$. Par convention, si l'ensemble des fonctions $f \in H^1(M,\nu)$ telles que $\mathbb{1}_A \leqslant f \leqslant \mathbb{1}_\Omega$ est vide, alors nous notons $Cap_\nu(A,\Omega) = +\infty$ (voir par exemple [**Maz85, Gri99**]).

Soit de plus μ une mesure de probabilité sur M, et un ensemble A vérifiant $\mu(A) \leqslant 1/2$ nous notons

$$Cap_\mu(A) := \inf\{Cap_\mu(A,\Omega);\ A \subset \Omega,\ \mu(\Omega) \leqslant 1/2\}. \tag{32}$$

Ainsi une inégalité de type capacité-mesure est de la forme

$$\frac{\mu(A)}{\gamma(\mu(A))} \leqslant Cap_\nu(A), \tag{33}$$

pour tout ensemble A vérifiant $\mu(A) \leqslant 1/2$ et pour une certaine fonction γ.

Un aspect remarquable de ces inégalités est qu'elles sont comparables à de nombreuses inégalités fonctionnelles classiques, telles que Poincaré ou Sobolev logarithmique.

3.1. Capacité et inégalité de Sobolev logarithmique faible ; applications

Les résultats de cette section proviennent d'un article écrit en collaboration avec Patrick Cattiaux et Arnaud Guillin paru dans *Probability Theory and Related Fielad* en 2007 : [**CGG07**].

Définition 3.1.1. — *Soient respectivement μ, ν une mesure de probabilité et une mesure positive sur M. On dit que le couple (μ,ν) vérifie une* inégalité de Sobolev logarithmique faible, **LSF**, *s'il existe une fonction décroissante* $\beta_{LSF} : (0,+\infty) \to \mathbb{R}^+$, *telle que pour tout* $s > 0$ *et pour tout fonction bornée et régulière,*

$$\textbf{(LSF)} \quad \mathbf{Ent}_\mu(f^2) := \int f^2 \log\left(\frac{f^2}{\int f^2 d\mu}\right) d\mu \leqslant \beta_{LSF}(s) \int |\nabla f|^2 d\nu + s\, \mathbf{Osc}^2(f)\,.$$

Cette définissons est une généralisation naturelle de l'inégalité de Poincaré faible que nous rappelons maintenant.

Définition 3.1.2. — *Soient* μ *et* ν *respectivement une mesure de probabilité et une mesure positive sur* M. *On dit que le couple* (μ,ν) *vérifie une* inégalité de Poincaré faible , *s'il existe une fonction décroissante* $\beta_{\mathrm{PF}} : (0,+\infty) \to \mathbb{R}^+$, *telle que pour tout* $s > 0$ *et pour toute fonction bornée et régulière,*

$$\textbf{(PF)} \qquad \forall\, s > 0\,, \quad \mathbf{Var}_\mu(f) \leqslant \beta_{\mathrm{PF}}(s) \int |\nabla f|^2\, d\nu + s\, \mathbf{Osc}^2(f)\,.$$

Le premier résultat formule une équivalence entre une inégalité de Sobolev logarithmique faible et une inégalité capacité-mesure. Pour simplifier nous supposerons ici que $\mu = \nu$.

Théorème 3.1.3. — *Supposons que le couple* (μ,μ) *vérifie* **LSF** *avec une fonction* β_{LSF}. *Pour tout* $A \subset M$ *tel que* $\mu(A) \leqslant 1/2$, *on a alors*

$$\forall s > 0, \quad \frac{\mu(A)\log\left(1+\frac{1}{2\mu(A)}\right) - s}{\beta_{LSF}(s)} \leqslant Cap_\mu(A).$$

Réciproquement, soit $\beta : (0,+\infty) \to \mathbb{R}^+$ *une fonction décroissante telle que pour tout* $A \subset M$ *avec* $\mu(A) \leqslant 1/2$, *on ait*

$$\forall s > 0, \quad \frac{\mu(A)\log\left(1+\frac{e^2}{\mu(A)}\right) - s}{\beta(s)} \leqslant Cap_\mu(A). \tag{34}$$

Alors la mesure μ *vérifie* **LSF** *avec la fonction* $\beta_{LSF}(s) = 16\beta(3s/14)$, *for* $s > 0$.

Remarque 3.1.4. — *Les deux inégalités suivantes nous montrent que l'inégalité de Sobolev logarithmique faible est équivalente à une inégalité capacité-mesure à une constante multiplicative près :*

$$\frac{\frac{\mu(A)}{2}\log\left(1+\frac{1}{2\mu(A)}\right)}{\beta_{LSF}\left(\frac{\mu(A)}{2}\log\left(1+\frac{1}{2\mu(A)}\right)\right)} \leqslant$$

$$\sup_{s>0}\left\{\frac{\mu(A)\log\left(1+\frac{1}{2\mu(A)}\right) - s}{\beta_{LSF}(s)}\right\} \leqslant \frac{\mu(A)\log\left(1+\frac{1}{2\mu(A)}\right)}{\beta_{LSF}\left(\mu(A)\log\left(1+\frac{1}{2\mu(A)}\right)\right)}$$

et

$$\frac{\frac{\mu(A)}{2}\log\left(1+\frac{e^2}{\mu(A)}\right)}{\beta_{LSF}\left(\frac{\mu(A)}{2}\log\left(1+\frac{e^2}{\mu(A)}\right)\right)} \leqslant \sup_{s>0}\left\{\frac{\mu(A)\log\left(1+\frac{e^2}{\mu(A)}\right)-s}{\beta_{LSF}(s)}\right\} \leqslant \frac{\mu(A)\log\left(1+\frac{e^2}{\mu(A)}\right)}{\beta_{LSF}\left(\mu(A)\log\left(1+\frac{e^2}{\mu(A)}\right)\right)}.$$

L'intérêt majeur de cette équivalence est que que l'on peut décrire très précisément les mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ qui vérifient une inégalité de Sobolev logarithmique faible. Nous retrouvons ici des critères de type Hardy adaptés à ces inégalités.

Proposition 3.1.5. — *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et notons ρ_μ sa densité. Soit m une médiane de μ et $\beta_{LSF} : (0,\infty) \to \mathbb{R}^+$ décroissante. Soit C la constante optimale telle que pour toute fonction bornée et régulière,*

$$\forall s>0, \quad \mathbf{Ent}_\mu\big(f^2\big) \le C\beta_{LSF}(s)\int|\nabla f|^2 d\mu + s\,\mathbf{Osc}^2(f).$$

Alors on a $\max(b_-,b_+) \le C \le \max(B_-,B_+)$*, où*

$$b_+ := \sup_{x>m}\frac{\frac{\mu([x,+\infty))}{2}\log\left(1+\frac{1}{2\mu([x,+\infty))}\right)}{\beta_{LSF}\left(\frac{\mu([x,+\infty))}{2}\log\left(1+\frac{1}{2\mu([x,+\infty))}\right)\right)}\int_m^x\frac{1}{\rho_\mu}$$

$$b_- := \sup_{x<m}\frac{\frac{\mu((-\infty,x])}{2}\log\left(1+\frac{1}{2\mu((-\infty,x])}\right)}{\beta_{LSF}\left(\frac{\mu((-\infty,x])}{2}\log\left(1+\frac{1}{2\mu((-\infty,x])}\right)\right)}\int_x^m\frac{1}{\rho_\mu}$$

$$B_+ := \sup_{x>m}\frac{16\mu([x,+\infty))\log\left(1+\frac{e^2}{\mu([x,+\infty))}\right)}{\beta_{LSF}\left(\frac{14}{3}\mu([x,+\infty))\log\left(1+\frac{e^2}{\mu([x,+\infty))}\right)\right)}\int_m^x\frac{1}{\rho_\mu} \tag{35}$$

$$B_- := \sup_{x<m}\frac{16\mu((-\infty,x])\log\left(1+\frac{e^2}{\mu((-\infty,x])}\right)}{\beta_{LSF}\left(\frac{14}{3}\mu((-\infty,x])\log\left(1+\frac{e^2}{\mu((-\infty,x])}\right)\right)}\int_x^m\frac{1}{\rho_\mu}$$

Ainsi, connaissant la densité de la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ on peut donner une estimée de la fonction β_{LSF} :

Exemple 3.1.6. — *Voici quelques exemples :*

- *Pour $\alpha>0$, la mesure $dm_\alpha(t)=\alpha(1+|t|)^{-1-\alpha}dt/2$, $t\in\mathbb{R}$ vérifie* **LSF** *avec la fonction*

$$\forall s>0, \quad \beta_{LSF}(s)=C\frac{(\log 1/s)^{1+2/\alpha}}{s^{2/\alpha}},$$

  où $C>0$ est une constante.
- *Pour $\alpha\in(0,2)$, définissons la mesure de probabilité $d\mu_\alpha(t)=Z_\alpha e^{-|t|^\alpha}dt$, $t\in\mathbb{R}$, (où Z_α est la constante de normalisation). Alors μ_α vérifie* **LSF** *avec la fonction*

$$\forall s>0, \quad \beta_{LSF}(s)=C(\log 1/s)^{(2-\alpha)/\alpha},$$

où $C > 0$ est une autre constante.

Contrairement au cas de l'inégalité de Poincaré faible étudiée par F. Barthe, P. Cattiaux et C. Roberto dans [**BCR05**], *on peut étudier le cas $\alpha \in (1, 2]$. En particulier on retrouve que pour $\alpha = 2$, la fonction β_{LSF} est bornée.*

De plus dans [**CGG07**] de nombreux liens entre les différentes inégalités classiques sont exhibés.

- On prouve que l'inégalité de Sobolev logarithmique faible est très fortement corrélée avec l'inégalité de Poincaré faible. Elles se déduisent l'une de l'autre en changeant les fonctions β associées aux deux inégalités.
- On donne un lien entre l'inégalité de Sobolev logarithmique faible et l'inégalité appelée *super Poincaré* introduite par F.Y. Wang dans [**Wan00**].
- Pour finir, les liens avec l'inégalité appelée *inégalité de Beckner généralisée* sont aussi présentés.

3.2. Applications à la convergence de processus de diffusion

L'inégalité de Sobolev logarithmique présentée dans la section 3.1 permet d'obtenir des estimées sur la convergence de semi-groupes en entropie.

Ce premier résultat nous montre la décroissance de l'entropie en fonction de l'oscillation de h. On obtient plus précisément :

Proposition 3.2.1. — *Soit μ satisfaisant une inégalité de Sobolev faible de fonction β_{LSF} et soit $h \geqslant 0$, bornée avec $\int h d\mu = 1$. Pour tout t assez grand, on a :*

$$\mathbf{Ent}_\mu(\mathbf{P_t} h) \leq C\xi(t)\, \mathbf{Osc}^2(\sqrt{h}) \tag{36}$$

où C est une constante et la fonction ξ est donnée par

$$\xi^{-1}(r) = -\frac{1}{2}\beta_{LSF}(r)\log(r), \tag{37}$$

pour r assez petit.

Réciproquement, s'il existe une fonction décroissante ξ telle que, pour toute fonction bornée $h \geqslant 0$, avec $\int h d\mu = 1$ on ait

$$\forall t > 0, \qquad \mathbf{Ent}_\mu(\mathbf{P_t} h) \leq \xi(t)\, \mathbf{Osc}^2(\sqrt{h}),$$

alors la mesure μ vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique faible de fonction $\beta_{LSF}(t) = \psi^{-1}(t)$ où $\psi(t) = 2\sqrt{2\,\xi(t)}$. En particulier si $\xi(t) \leqslant ce^{-\alpha t}$, pour un certain $\alpha > 0$, alors la mesure μ vérifie une inégalité de Poincaré.

Ce résultat de convergence permet d'obtenir des estimées pour la convergence à l'équilibre de processus de diffusion en variation totale ou en entropie. Nous étudions le cas où la loi initiale du processus n'admet pas forcément de densité par rapport à la mesure réversible μ. Ainsi l'entropie initiale n'est pas forcément finie.

Par simplicité nous considérons seulement le cas où $M = \mathbb{R}^n$ et $\mu = e^{-2V}dx$. Ainsi le processus de diffusion est donné par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t \;=\; dB_t \;-\; (\nabla V)(X_t)dt, \quad Loi(X_0) = \nu \tag{38}$$

où $B_.$ est un mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^n$.

On suppose que V est de classe C^3 et qu'il existe une fonction ψ telle que $\psi(x) \to +\infty$ lorsque $|x| \to +\infty$ et

$$-\frac{1}{2}\,\Delta\,\psi\,+\,\nabla V.\nabla\psi$$

est bornée inférieurement. Cette hypothèse nous assure l'existence d'une unique solution de (38) qui n'explose pas en temps fini, cf. [**Roy99**]. Si $\nu = \delta_x$, notons X_t^x le processus associé.

Une conséquence remarquable du théorème de Girsanov est que sous les hypothèses mentionnés ci-dessus, pour toute mesure ν et tout $t > 0$, la loi de X_t (notée $\mathbf{P_t}\nu$) est absolument continue par rapport à μ. Sa densité est alors notée h_t. Avec de plus, si $\nu = h\mu$, $\mathbf{P_t}\nu = (\mathbf{P_t}h)\mu$ et μ est la mesure reversible.

En particulier $\mathbf{P_t}\nu = (\mathbf{P}_{t-u}h_u)\mu$, et le taux de convergence de $\mathbf{P_t}\nu$ vers la mesure réversible μ peut-être étudié en utilisant les propriétés du semi-groupe. Dans ce cadre, nous utiliserons la notation $\mathbf{P_t}\nu = (\mathbf{P}_{t-u}h_u)$, et nous identifions donc ici la mesure avec sa densité. L'objectif ici est de comprendre le comportement asymptotique de $\mathbf{P_t}h$, où h est une densité de probabilité.

Intéressons nous ici au cas où

$$|\nabla V|^2(x) - \frac{1}{2}\Delta V(x) \geqslant -C_{min} > -\infty \tag{39}$$

pour une constante C_{min} positive ; il est alors possible de montrer que (se référer à [**Roy99**, Theorem 3.2.7]) que $\mathbf{Ent}_\mu(\mathbf{P_t}\delta_x)$ est fini pour tout $t > 0$. Plus précisément, on obtient le résultat suivant :

Proposition 3.2.2. — *Avec les hypothèses précédentes : si on a*

$$\int e^{V_+} d\nu := M < +\infty,$$

où V_+ représente la partie positive de V et alors il existe $t_0 > 0$ et une constante C telle pour tour $p > 1$,

$$\left(\int \mathbf{P_t}\nu\, \log_+^p(\mathbf{P_t}\nu)\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant p\,C \tag{40}$$

pour tout $t \geqslant t_0 > 0$. Si de plus on a

$$V_+(y) \leqslant D(V_+(x) + |y-x|^2 + D'), \tag{41}$$

pour certaines constantes $D > 0$, D' et pour tout couple (x, y), il suffit alors de supposer

$$\int e^{\lambda V_+} d\nu := M < +\infty$$

pour un certain $\lambda > 0$.

Théorème 3.2.3. — *Soit $d\mu = e^{-2V}dx$ une mesure de probabilité satisfaisant une inégalité de Sobolev logarithmique faible de fonction β_{LSF}. Soit ξ la fonction définie* (37). *Supposons que la condition* (39) *est satisfaite et que ν est une mesure de probabilité telle que* (40) *soit vérifiée.*

Alors pour tout $1 \geqslant \varepsilon > 0$ et tout $k > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon, k)$, et $t_\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathbf{Ent}_\mu(\mathbf{P}_{kt}\nu) \leqslant \frac{C(\varepsilon,k)}{\log^{k(1-\varepsilon)}(1/\xi(t))}\,,$$

pour tout $t > t_\varepsilon$.

La démonstration de ce résultat est basée sur la semi-additivité de l'entropie : si f, g sont deux fonctions positives alors on a

$$\mathbf{Ent}_\mu(f+g) \leqslant \mathbf{Ent}_\mu(f) + \mathbf{Ent}_\mu(g)\,.$$

Ainsi pour $h \geqslant 0$, appliquons cette dernière inégalité à $f = \mathbf{P_t}(h\mathbb{I}_{h\leqslant K})$ et $g = \mathbf{P_t}(h\mathbb{I}_{h>K})$, et d'après la décroissance l'entropie le long du semi-groupe nous obtenons

$$\mathbf{Ent}_\mu(\mathbf{P_t}h) \;\leqslant\; \mathbf{Ent}_\mu(\mathbf{P_t}(h\mathbb{I}_{h\leqslant K})) + \mathbf{Ent}_\mu(h\mathbb{I}_{h>K})\ , \tag{42}$$

pour tout $K > 0$.

Exemple 3.2.4. — *Essayons maintenant de percevoir la pertinence de l'inégalité de Sobolev logarithmique faible. Il est clair que la décroissance proposée dans le théorème 3.2.3 n'est pas optimale. L'intérêt majeur de l'inégalité de Sobolev faible provient de l'utilisation de l'entropie au lieu de la variance, puisque il est en effet moins restrictif de se placer dans le cas où l'entropie est finie que dans le cas ou la variance est finie. Illustrons ceci par un exemple simple. Nous cherchons une condition initiale ν telle que tout en ayant une entropie fini, $\mathbf{P_s}\nu \notin L^2(\mu)$.*

Soit une fonction V telle que pour tout $\lambda > 0$, $\int e^{-\lambda V}dx < +\infty$, par exemple $V(y) = |y|^\alpha$, $1 \leqslant \alpha < 2$. Soit $d\mu = e^{-2V}dx$ et $d\nu = e^{-(2-\varepsilon)V}/Z_\varepsilon\, dx$ tel que $d\nu/d\mu := h = Z_\varepsilon\, e^{\varepsilon V} \notin \mathbb{L}^2(\mu)$ pour $2 > \varepsilon > 1$, mais $\int e^{\frac{2-\varepsilon}{2}V} d\nu < +\infty$.
On peut montrer dans ce cas que pour tout $s \geqslant 0$, $\mathbf{P_s}h \notin \mathbb{L}^2(\mu)$ tandis que la condition (41) *est satisfaite.*

Dans cet exemple les inégalités de Poincaré ou de Poincaré faible ne peuvent pas être appliquées.

3.3. L^q-inégalités et applications aux milieux poreux à poids

Les résultats de cette section proviennent d'un article écrit en collaboration avec Jean Dolbeault, Arnaud Guillin et Feng-Yu Wang paru dans *Potential Analysis* en 2008 : [**DGGW08**].

Nous travaillons ici avec deux mesures de Borel μ et ν sur une variété riemannienne (M, g), μ étant supposée être une mesure de probabilité, et μ et ν n'étant pas forcément absolument continues par rapport à la mesure de volume. Pour considérer des quantités telles que $\int f^q\, d\mu$ ou $\int |\nabla f|^2\, d\nu$, il est naturel de travailler dans l'espace de fonctions $f \in \mathcal{C}^1(M)$.

Définition 3.3.1. — *Soit $q \in (0,1]$. On dit que (μ,ν) vérifie une L^q-*inégalité de Poincaré *de constante* $\mathrm{C_P}$ *si pour toute fonction positive $f \in \mathcal{C}^1(M)$ on a*

$$\big[\mathbf{Var}_\mu(f^q)\big]^{1/q} := \left[\int f^{2q}\, d\mu - \left(\int f^q\, d\mu\right)^2\right]^{1/q} \leqslant \mathrm{C_P} \int |\nabla f|^2\, d\nu\ . \tag{43}$$

*On dit aussi que (μ,ν) vérifie une L^q-*inégalité de Sobolev logarithmique *de constante* $\mathrm{C_{LS}}$ *si pour toute fonction positive $f \in \mathcal{C}^1(M)$, on a*

$$\mathbf{Ent}_\mu\big(f^{2q}\big)^{1/q} := \left(\int f^{2q}\, \frac{\log f^{2q}}{\int f^{2q}\, d\mu}\, d\mu\right)^{1/q} \leqslant \mathrm{C_{LS}} \int |\nabla f|^2\, d\nu\ .$$

Décrivons maintenant ces inégalités en utilisant les inégalités de type capacité-mesure comme dans la section 3.1. La difficulté est le cadre non-linéaire des inégalités. Comme dans le cas de l'inégalité de Sobolev logarithmique faible, nous obtenons l'équivalence entre une inégalité de type capacité-mesure et une L^q-inégalité de Poincaré.

Soit $q \in (0,1)$ définissons alors

$$\beta_{\mathrm{P}} := \sup \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\big[\mu(\Omega_k)\big]^{1/(1-q)}}{\big[\mathrm{Cap}_\nu(\Omega_k, \Omega_{k+1})\big]^{q/(1-q)}} \right\}^{(1-q)/q}$$

où le supremum est pris sur tout $\Omega \subset M$ avec $\mu(\Omega) \leq 1/2$ et toute suite $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1} \subset \Omega$. Dans ce cas nous pouvons caractériser les mesures vérifiant la L^q-inégalité de Poincaré.

Théorème 3.3.2. — *Soient μ et ν respectivement une mesure de probabilité et une mesure positive sur M.*

(i) *Si $q \in [1/2, 1)$ et (μ, ν) vérifie une L^q-inégalité de Poincaré avec une constante égale à $\mathrm{C_P}$, alors $\beta_{\mathrm{P}} \leqslant 2^{1/q}\, \mathrm{C_P}$.*
(ii) *Si maintenant $q \in (0,1)$ et $\beta_{\mathrm{P}} < +\infty$, alors (μ, ν) vérifie une L^q-inégalité de Poincaré avec une constante égale à $\mathrm{C_P} \leqslant \kappa_{\mathrm{P}}\, \beta_{\mathrm{P}}$, pour un certain κ_{P} qui ne dépend que de q.*

Soit $q \in (0,1)$ et définissons la quantité

$$\beta_{\mathrm{LS}} = \sup \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\left[\mu(\Omega_k)\, \log\!\left(1 + \frac{e^2}{\mu(\Omega_k)}\right)\right]^{1/(1-q)}}{\big[\mathrm{Cap}_\nu(\Omega_k, \Omega_{k+1})\big]^{q/(1-q)}} \right\}^{(1-q)/q}$$

où le supremum est pris sur tout $\Omega \subset M$ avec $\mu(\Omega) \leq 1/2$ et toute suite $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1} \subset \Omega$.

Théorème 3.3.3. — *Soit μ et ν respectivement une mesure de probabilité et une mesure positive sur M. Si $q \in (0,1)$ et $\beta_{\mathrm{LS}} < +\infty$, alors (μ, ν) vérifie une L^q-inégalité de Sobolev logarithmique avec la constante égale à $\mathrm{C_{LS}} \leqslant \kappa_{\mathrm{LS}}\, \beta_{\mathrm{LS}}$, où κ_{LS} dépend seulement de q.*

Contrairement au cas de l'inégalité de Poincaré, nous ne savons pas s'il y a équivalence entre la majoration de la constante β_{LS} et une L^q-inégalité de Sobolev logarithmique.

Comme nous pouvons l'observer dans les théorèmes 3.3.2 et 3.3.3 il n'est pas évident de vérifier si un couple de mesures (μ, ν) vérifie une L^q-inégalité. Nous affaiblissons, dans la proposition suivante, les inégalités pour pouvoir obtenir des conditions accessibles. Le premier résultat, pour Poincaré, est dû à Maz'ja, et se trouve généralisé pour l'entropie dans [**DGGW08**].

Théorème 3.3.4 ([**Maz85**],[**DGGW08**]). — *Soit $q \in [1/2, 1)$. Pour tout ensemble ouvert $\Omega \subset M$, si $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une suite croissante d'ensembles ouverts tels* *que* $\Omega_k \subset \Omega_{k+1} \subset \Omega$, *alors*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\mu(\Omega_k)^{1/(1-q)}}{[\mathrm{Cap}_\nu(\Omega_k, \Omega_{k+1})]^{q/(1-q)}} \leqslant \frac{1}{1-q} \int_0^{\mu(\Omega)} \left(\frac{t}{\Phi(t)}\right)^{q/(1-q)} dt\ ,$$

où $\Phi(t) := \inf\{\mathrm{Cap}_\nu(A,\Omega) : A \subset \Omega,\ \mu(A) \geqslant t\}$. *De même nous obtenons également :*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\left[\mu(\Omega_k)\log\left(1+\frac{e^2}{\mu(\Omega_k)}\right)\right]^{1/(1-q)}}{[\mathrm{Cap}_\nu(\Omega_k, \Omega_{k+1})]^{q/(1-q)}} \leqslant \frac{1}{1-q} \int_0^{\mu(\Omega)} \left(\frac{t}{\psi(t)}\right)^{q/(1-q)} dt\ ,$$

où $\psi(t) := \inf\left\{\mathrm{Cap}_\nu(A,\Omega) : A \subset \Omega,\ \mu(A)\ \log\left(1+\frac{e^2}{\mu(A)}\right) \geqslant t\right\}$.

Notons qu'en conséquence nous obtenons les estimées suivantes :

$$\beta_{\mathrm{P}} \leqslant \left(\frac{1}{1-q}\right)^{(1-q)/q} \|t/\Phi(t)\|_{L^{q/(1-q)}(0,\mu(\Omega))}$$

et

$$\beta_{\mathrm{LS}} \leqslant \left(\frac{1}{1-q}\right)^{(1-q)/q} \|t/\psi(t)\|_{L^{q/(1-q)}(0,\mu(\Omega))}.$$

Le théorème 3.3.4 est important, du fait que les fonctions Φ et ψ sont assez faciles à estimer. Elles correspondent en effet aux inégalités de capacité-mesures associées aux inégalités de Poincaré faible et Sobolev logarithmique faible (voir le théorème 3.1.3).

Corollaire 3.3.5. — *Soit* $q \in [1/2, 1)$. *Supposons que* (μ,ν) *vérifie une inégalité de Poincaré faible de fonction* β_{PF}. *Alors* (μ,ν) *vérifie une* L^q*-inégalité de Poincaré avec*

$$\beta_{\mathrm{P}} \leqslant \kappa_{\mathrm{P}} \left(\tfrac{4}{1-q}\right)^{\frac{1-q}{q}} \|\beta_{\mathrm{PF}}(\cdot/4)\|_{L^{\frac{q}{1-q}}(0,1/2)},$$

où κ_{P} *est définie dans le théorème 3.3.3.*

De la même manière, si (μ,ν) *vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique de fonction* β_{LSF}, *alors elle vérifie une* L^q*-inégalité de Sobolev logarithmique si*

$$\beta_{LS} \leqslant C_q \|\beta_{\mathrm{LSF}}(c_q\,\cdot)\|_{L^{\frac{q}{1-q}}(0,1/2)},$$

où C_q, c_q *sont deux constantes.*

Nous pouvons résumer les résultats obtenus dans le schéma suivant : pour tout $q \in [1/2, 1)$,

$$L^q\text{-Poincaré} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c}\text{Poincaré faible}\\ \text{avec } \beta_{\mathrm{PF}}(s) = C\, s^{\frac{q-1}{q}}\end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} L^{q'}\text{-Poincaré}\\ \forall\, q' \in (0,q)\end{array}\ ,$$

$$L^q\text{-Sobolev log.} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c}\text{Sobolev log. faible}\\ \text{avec } \beta_{\mathrm{LSF}}(s) = C\, s^{\frac{q-1}{q}}\end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} L^{q'}\text{-Sobolev Log.}\\ \forall\, q' \in (0,q)\end{array}\ .$$

De façon générale, les inégalités capacité-mesures impliquant les L^q-inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique, on peut, par le critère de Hardy, donner des exemples concrets en dimension 1. Ainsi sur $\mathbb{R}$, soient μ une mesure de probabilité et ν une mesure positive de densité ρ_ν par rapport à la mesure de Lebesgue ; si m_μ est une médiane μ, nous associons les fonctions

$$R(x) := \mu([x,+\infty)) \ , \quad L(x) := \mu((-\infty,x]) \ , \quad r(x) := \int_{m_\mu}^{x} \frac{1}{\rho_\nu}\,dx \quad \text{et} \quad \ell(x) := \int_{x}^{m_\mu} \frac{1}{\rho_\nu}\,dx \ .$$

Proposition 3.3.6. — *Le couple (μ,ν) vérifie une L^q-inégalité de Poincaré si*

$$\int_{m_\mu}^{\infty} |\, r\, R\,|^{q/(1-q)}\,d\mu < \infty \quad \textit{et} \quad \int_{-\infty}^{m_\mu} |\,\ell\, L\,|^{q/(1-q)}\,d\mu < \infty \ .$$

De façon analogue, (μ,ν) vérifie une L^q-inégalité de Sobolev logarithmique si

$$\int_{m_\mu}^{\infty} |\, r\, R\,\log R\,|^{q/(1-q)}\,d\mu < \infty \quad \textit{et} \quad \int_{-\infty}^{m_\mu} |\,\ell\, L\,\log L\,|^{q/(1-q)}\,d\mu < \infty \ .$$

Nous pouvons illustrer par les exemples suivants sur $\mathbb{R}$ dans le cas où $\mu = \nu$.

(i) Pour $p \in (0,1)$, et considérons la mesure de probabilité $d\mu = e^{-|x|^p}/(2\,\Gamma(1+1/p))\,dx$, $x \in \mathbb{R}$. Alors μ satisfait aussi une L^q-inégalité de Poincaré et une L^q-inégalité de Sobolev logarithmique pour tout $q \in [1/2,1)$.

(ii) Soit $\alpha > 0$, et considérons la mesure de probabilité $d\mu = \alpha\,(1+|x|)^{-1-\alpha}\,dx/2$, $x \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $q \in [1/2,1)$, la mesure μ vérifie une L^q-inégalité de Poincaré et une L^q-inégalité de Sobolev logarithmique si $\alpha > 2q/(1-q)$.

(iii) Ainsi d'après les exemples proposés, les deux L^q-inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique semblent équivalentes. Il semble que ce n'est toutefois pas le cas, comme l'illustre l'exemple suivant :

$$d\mu = \frac{C_{\alpha,\beta}}{1+|x|^{1+\alpha}\,|\log x|^{\beta}}\,dx \quad \text{avec} \quad \alpha > 0\,,\ \beta \in \mathbb{R}\ .$$

Cette mesure vérifie une inégalité de Poincaré faible avec $\beta_{\mathrm{PF}}(s) = C\,s^{-2/\alpha}(\log(1/s))^{-2\beta/\alpha}$ pour une certaine constante $C > 0$, et une inégalité Sobolev logarithmique faible avec $\beta_{\mathrm{LSF}}(s) = C' s^{-2/\alpha}(\log(1/s))^{1+2(1-\beta)/\alpha}$ pour une autre constante C'. Il en résulte que si α est fixé tel que $\frac{2}{\alpha}\frac{q}{1-q} = 1$, la convergence des intégrales de Bertrand impliquent que μ satisfait une L^q-inégalité de Poincaré si et seulement si $\beta > 1$, et une L^q-inégalité de Sobolev logarithmique si $\beta > 1 + 1/(1-q)$. Ces conditions diffèrent donc clairement.

3.4. Applications aux milieux poreux à poids

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ une fonction telle que $\int e^{-\psi} dx < +\infty$. Définissons la mesure de probabilité

$$d\mu_\psi := \frac{e^{-\psi}\,dx}{Z_\psi}$$

et l'opérateur $\mathbf{L}$ sur $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ par

$$\forall\ f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)\,, \quad \mathbf{L} f := \Delta f - \nabla\psi \cdot \nabla f\ .$$

Un tel opérateur $\mathbf{L}$ est symétrique dans $L^2_{\mu_\psi}(\mathbb{R}^d)$,

$$\forall\ f,\, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)\,, \quad \int f\,\mathbf{L} g\,d\mu_\psi = -\int \nabla f \cdot \nabla g\,d\mu_\psi\ .$$

Considérons pour $m > 1$, l'équation aux dérivées partielles non-linéaires

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{L}\, u^m \tag{MPP}$$

pour $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, avec une condition initiale positive $u(0,x) = u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Une telle équation est appelée *équation des milieux poreux à poids.*

Le premier résultat est un théorème d'existence. Nous n'avons pas trouvé dans la littérature un tel résultat. Cette équation diffère du cas classique car la mesure de référence n'est plus la la mesure de Lebesque sur $\mathbb{R}^n$ mais une mesure de probabilité.

Proposition 3.4.1. — *Soit $u_0 \in \mathcal{C}^1 \cap L^{m+1}_{\mu_\psi}(\mathbb{R}^d)$, une condition initiale positive.*

Alors il existe une unique solution classique de (MPP) *sur $\mathbb{R}^+$, avec pour condition initiale u_0.*

Comme c'est le cas pour les diffusions linéaires, nous obtenons un lien entre la vitesse de convergence et les inégalités fonctionnelles.

Théorème 3.4.2. — *Soit $m \geqslant 1$.*

(i) Si (μ_ψ, μ_ψ) vérifie une L^q-inégalité de Poincaré avec $q = 2/(m+1)$, pour une certaine constante $\mathrm{C_P} > 0$, alors pour toute condition initiale $u_0 \in L^2(\mu_\psi)$, nous avons

$$\forall\, t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{Var}_{\mu_\psi}(u(\cdot,t)) \leqslant \left(\left[\mathbf{Var}_{\mu_\psi}(u_0)\right]^{-(m-1)/2} + \frac{4\,m\,(m-1)}{(m+1)^2}\,\mathrm{C_P}\,t \right)^{-2/(m-1)} .$$

Réciproquement, si la condition ci-dessus est satisfaite pour tout u_0, alors (μ_ψ, μ_ψ) vérifie une L^q-inégalité de Poincaré de constante $\mathrm{C_P}$.

(ii) De la même manière, si (μ_ψ, μ_ψ) vérifie une L^q-inégalité de Sobolev logarithmique avec $q = 1/m$, pour une certaine constante $\mathrm{C_{LS}} > 0$, alors pour toute condition initiale u_0 telle que $\mathbf{Ent}_{\mu_\psi}(u_0) < \infty$, nous avons

$$\forall\, t \geqslant 0\,, \quad \mathbf{Ent}_{\mu_\psi}(u(\cdot,t)) \leqslant \left(\left[\mathbf{Ent}_{\mu_\psi}(u_0)\right]^{1-m} + \frac{4\,(m-1)}{m}\,\mathrm{C_{LS}}\,t \right)^{-1/(m-1)} .$$

Réciproquement, si la condition ci-dessus est satisfaite pour tout u_0, alors (μ_ψ, μ_ψ) vérifie une L^q-inégalité de Sobolev logarithmique de constante $\mathrm{C_{LS}}$.

3.4.1. Remarques et Perspectives. —

– Les inégalité de type capacité-mesure sont difficiles à établir si l'on écarte le cadre de la dimension 1. Une question naturelle autour de ces inégalités est la tensorisation. Par exemple, nous savons que l'inégalité de Poincaré est équivalente, à une constante près, à l'inégalité

$$\mu(A) \leqslant C\mathrm{Cap}(A). \tag{44}$$

Nous savons que l'inégalité de Poincaré est indépendante de la dimension mais cette question n'est en revanche pas résolue pour (44).

De plus, que peut-on dire des inégalités capacité-mesures pour des mesures discrètes ou alors pour des gradients non locales comme pour forme de Dirichlet provenant de générateur infinitésimaux de processus de Lévy ? Quelques pistes seront données dans la section 4.3.

- Dans un travail en cours avec Arnaud Guillin, nous nous intéressons à l'évolution des diffusions rapides à poids, c'est-à-dire lorsque le paramètre m appartient à $]0,1]$ dans l'équation des milieux poreux à poids. Ajouter des poids change beaucoup la nature de l'équation, en particulier il n'y a pas de restriction sur le paramètre m comme c'est le cas pour le laplacien. L'existence d'une solution s'obtient facilement puisque nous nous plaçons sur un espace de probabilité (donc de masse finie). L'estimation de la vitesse de convergence quant à elle est plus délicate. Celle-ci repose sur des inégalités plus difficiles à prouver ; il semble qu'une décroissance polynomiale classique n'est possible que pour des diffusions non-linéaires définies sur des ensembles compactes.
- L'équation des milieux poreux classique, lorsque que le générateur est le laplacien, peut apparaître comme la limite naturelle hydrodynamique d'un modèle de particule, voir [**GLT07**]. Une question naturelle est de savoir si l'équation des milieux poreux à poids peut apparaître comme la limite hydrodynamique dans une situation où l'on a ajouté un courant ou alors une force de rappel.

CHAPITRE 4

MÉTHODES ENTROPIQUES POUR DES ÉVOLUTIONS DISSIPATIVES

4.1. Existence et étude entropique d'une équation d'ordre 4

Les résultats présentés ici proviennent d'un article écrit en collaboration avec Jean Dolbeault et Ansgar Jüngel paru dans *Communications in Mathematical Sciences* en 2006 : [**DGJ06**].

Nous nous intéressons ici à l'équation d'évolution non linéaire d'ordre 4 suivante

$$u_t + (u(\log u)_{xx})_{xx} = 0, \quad u(\cdot,0) = u_0 \geq 0 \quad \text{in } S^1, \tag{45}$$

où S^1 est le tore unidimensionnel que l'on paramètre avec la variable $x \in [0, L]$ pour une certaine constante $L > 0$ fixée.

Cette équation est nommée *l'équation de Derrida-Lebowitz-Speer-Spohn (DLSS)* (voir [**DLSS91**]). C'est une équation homogène d'ordre 1, possédant plusieurs fonctionnelles décroissantes de long des trajectoires. Un calcul formel nous donne :

$$\frac{d}{dt}\int_{S^1} u(\log u - 1) + 1dx + \int_{S^1} u\,|(\log u)_{xx}|^2\,dx = 0. \tag{46}$$

et

$$\frac{d}{dt}\int_{S^1}(u - \log u)dx + \int_{S^1} |(\log u)_{xx}|^2\,dx = 0. \tag{47}$$

Le premier théorème est un résultat d'existence.

Théorème 4.1.1. — *Soit $u_0 : S^1 \to \mathbb{R}$ une condition initiale telle que $\int_{S^1}(u_0 - \log u_0)dx < \infty$ et soit $T > 0$.*

Alors il existe une solution faible globale u de (45) vérifiant

$$u \in L^{5/2}(0,T; W^{1,1}(S^1)) \cap W^{1,10/9}_{\mathrm{loc}}(0,T; H^{-2}(S^1)),$$
$$u \geq 0 \quad \text{sur } S^1 \times (0,\infty), \quad \log u \in L^2(0,T; H^2(S^1)),$$

pour tout $T > 0$ et toute fonction test régulière φ,

$$\int_0^T \langle u_t, \varphi\rangle_{H^{-2},H^2}dt + \int_0^T\int_{S^1} u(\log u)_{xx}\varphi_{xx}dxdt = 0.$$

La condition initiale est satisfaite dans le sens de $H^{-2}(S^1) := (H^2(S^1))^*$.

Pour l'étude de la convergence à l'équilibre, nous avons repris des inégalités fonctionnelles sur le tore unidimensionnel. Le théorème suivant est dû à Weissler.

Il s'agit de l'inégalité de Sobolev logarithmique sur le tore de dimension 1 (voir [**Wei78b, Rot80, ÉY87**] et [**Gen06**] pour une synthèse).

Théorème 4.1.2. — *Pour toute fonction régulière et L-périodique, nous avons l'inégalité de Sobolev logarithmique suivante pour la mesure μ_L*

$$\mathbf{Ent}_{\mu_L}\left(f^2\right) \leqslant \frac{L^2}{2\pi^2}\int (f')^2 d\mu_L. \tag{48}$$

Cette inégalité est de plus optimale.

La méthode d'entropie et de production d'entropie permet aussi d'obtenir des inégalités de type Beckner :

Remarque 4.1.3. — *Pour tout $p \in]1,2]$ et toute fonction régulière et L-périodique, on a :*

$$\frac{\int f^2 d\mu_L - \left(\int f^{2/p} d\mu_L\right)^p}{p-1} \leqslant \frac{L^2}{2\pi^2 p}\int \left(f'\right)^2 d\mu_L. \tag{49}$$

Corollaire 4.1.4. —
- *Nous pouvons nous affranchir de la périodicité, et l'on a par suite, pour toute fonction régulière,*

$$\mathbf{Ent}_{\mu_L}\left(f^2\right) \leqslant \frac{2L^2}{\pi^2}\int \left(f'\right)^2 d\mu_L. \tag{50}$$

  Cette inégalité est également optimale.
- *Soit $n > 0$; on a alors les inégalités d'ordre n suivantes, pour toute fonction régulière et L-périodique :*

$$\mathbf{Var}_{\mu_L}(f) \leqslant \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{2n}\int \left(f^{(n)}\right)^2 d\mu_L, \tag{51}$$

$$\mathbf{Ent}_{\mu_L}\left(f^2\right) \leqslant 2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^{2n}\int \left(f^{(n)}\right)^2 d\mu_L. \tag{52}$$

  Ces deux inégalités sont aussi optimales.

En utilisant le théorème d'existence et les inégalités fonctionnelles associées, nous obtenons la décroissance exponentielle de la solution à l'équilibre de (45).

Théorème 4.1.5. — *Supposons que la condition initiale u_0 soit une fonction mesurable positive telle que*

$$\int_{S^1}(u_0 - \log u_0)dx \quad \text{et} \quad \int_{S^1} u_0 \log u_0 dx$$

soient finies. Soit u une solution faible de (45) *construite grâce au théorème 4.1.1, et posons $\bar{u} = \int_{S^1} u_0(x)dx/L$. Alors*

$$\forall t > 0,\ \int_{S^1} u(\cdot,t)\log\left(\frac{u(\cdot,t)}{\bar{u}}\right)dx \leq e^{-M_1 t}\int_{S^1} u_0 \log\left(\frac{u_0}{\bar{u}}\right)dx,$$

où $M_1 = \frac{32\pi^4}{L^4}$.

De plus, si l'on a $\sqrt{u_0} \in H^1(S^1)$*, nous obtenons*

$$\int_{S^1} \left((\sqrt{u})_x(\cdot,t)\right)^2 dx \leq e^{-M_2 t} \int_{S^1} (\sqrt{u_0})_x^2 dx,$$

où $M_2 = 16\mu\pi^4/L^4$ *et* $\mu = (103+\sqrt{214})/72$ *est la plus grande racine de* $36x^2 - 103x + 72 = 0$*.*

4.2. Etudes fines de convergence à l'équilibre

Les résultats présentés ici ont été écrits en collaboration avec José Antonio Carrillo, Jean Dolbeault et Ansgar Jüngel et sont parus dans *Discrete and Continuous Dynamical Systems-series B* en 2006 : [**CDGJ06**].

A travers trois équations d'évolutions non-linéaires différentes, nous faisons une étude fine de la convergence entropique. Les 3 équations sont les suivantes : la première est l'équation des milieux poreux ou des diffusions rapides ($m > 0$) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (u^m)_{xx}\ , \quad x \in S^1\ , \quad t > 0\ , \tag{53}$$

la seconde équation est celle des films minces ($m > 0$)

$$u_t = -(u^m\, u_{xxx})_x\ , \quad x \in S^1\ , \quad t > 0\ , \tag{54}$$

et enfin la dernière est celle étudiée dans la section précédente 4.1, l'équation de Derrida-Lebowitz-Speer-Spohn (DLSS),

$$u_t = -(u\,(\log u)_{xx})_{xx}\ , \quad x \in S^1\ , \quad t > 0\ , \tag{55}$$

avec une condition initiale $u(\cdot,0) = u_0 \geqslant 0$ dans $S^1 \equiv [0,1)$.

4.2.1. Inégalités fonctionnelles non linéaires adaptées.

— Nous nous plaçons ici dans l'espace $S^1 \equiv [0,1)$ en imposant des conditions périodiques au bord de $[0,1)$. La mesure de Lebesgue sur S^1 est alors une mesure de probabilité : $\int_{S^1} dx = 1$.

Notons $\mu_p[v]$ et $\bar{v}$ les moyennes d'une fonction positive v sur S^1 :

$$\mu_p[v] := \left(\int_{S^1} v^{1/p}\, dx\right)^p \quad \text{et} \quad \bar{v} := \int_{S^1} v\, dx\ ,$$

ainsi $\bar{v} = \mu_1[v]$.

Définition 4.2.1. — *Soit* $p \in (0,+\infty)$ *et* $q \in \mathbb{R}$*. Sur l'espace* $\{v \in H^1_+(S^1)\ :\ v \not\equiv 0\ p.s.\}$*, définissons la famille d'entropies dépendant des paramètres* (p,q) *par*

$$\Sigma_{p,q}[v] := \frac{1}{p\,q\,(p\,q-1)}\left[\int_{S^1} v^q\, dx - (\mu_p[v])^q\right] \qquad si\ p\,q \neq 1\ et\ q \neq 0\ ,$$

$$\Sigma_{1/q,q}[v] := \int_{S^1} v^q \log\left(\frac{v^q}{\int_{S^1} v^q\, dx}\right) dx \qquad si\ p\,q = 1\ et\ q \neq 0\ ,$$

$$\Sigma_{p,0}[v] := -\frac{1}{p}\int_{S^1} \log\left(\frac{v}{\mu_p[v]}\right) dx \qquad si\ q = 0\ .$$

La fonctionnelle d'énergie correspondant aux équations du deuxième ordre est définie par

$$J_1[v] := \int_{S^1} |v'|^2 \, dx \quad \forall\, v \in H^1(S^1)\ .$$

et la fonctionnelle d'énergie correspondant aux équations du quatrième ordre est définie par

$$J_2[v] = \int_{S^1} |v''|^2 \, dx \quad \forall\, v \in H^2(S^1)\ .$$

Grâce à l'inégalité de Jensen, les quantités $\Sigma_{p,q}[v]$ sont positives pour tout $p \in (0,+\infty)$ et $q \in \mathbb{R}$. La définition des cas limites $p\,q = 1$ et $q = 0$ est cohérente, puisque

$$\begin{aligned} \lim_{p\to 1/q} \Sigma_{p,q}[v] &= \Sigma_{1/q,q}[v] \quad \text{pour } q > 0\ ,\\ \lim_{q\to 0} \Sigma_{p,q}[v] &= \Sigma_{p,0}[v] \quad \text{pour } p > 0\ . \end{aligned}$$

On peut par ailleurs s'intéresser au cas limite suivant, lorsque $p = q = 0$,

$$-\int_{S^1} \log\left(\frac{v}{\|v\|_\infty}\right) dx\ ,$$

mais celle-ci ne sera pas utilisée.

Les inégalités de Beckner correspondent au cas $\Sigma_{p/2,2}$ où $p \in (1,2]$. Le cas limite $p \to 1$ correspond au cas de l'entropie classique, utilisée pour l'inégalité de Sobolev logarithmique.

Les inégalités fonctionnelles obtenues sont :

Théorème 4.2.2. — *Pour tout $p \in (0,+\infty)$ et $q \in (0,2)$, il existe $\kappa_{p,q} > 0$ telle que pour tout $v \in H^1_+(S^1)$,*

$$\Sigma_{p,q}[v]^{2/q} \leqslant \frac{1}{\kappa_{p,q}}\, J_1[v]\ .$$

Soient de plus $p \in (0,+\infty)$ et $q \in (0,2)$ tels que $p\,q \neq 1$; alors

$$\Sigma_{p,q}[v]^{2/q} \leqslant \frac{1}{4\pi^2\,\kappa_{p,q}}\, J_2[v] \quad \forall\, v \in H^2_+(S^1)\ . \tag{56}$$

Remark. Les résultats décrits dans cette cette section sont parus avant ceux de la section 3.3. Pour des raisons de présentation, cette partie figure après, même si la proposition 3.3.6 permet de retrouver et même de donner une estimation des constantes $\kappa_{p,q} > 0$ trouvées dans le théorème 4.2.2.

Les entropies décroissant le long des trajectoires, nous pouvons maintenant reformuler ces inégalités dans le cas où les entropies sont petites ; les fonctions admissibles sont alors dans l'ensemble suivant :

$$\mathcal{X}^{p,q}_\varepsilon := \left\{ v \in H^1_+(S^1) \ :\ \Sigma_{p,q}[v] \leqslant \varepsilon \text{ et } \mu_p[v] = 1 \right\}\ ,$$

et nous obtenons :

Théorème 4.2.3. — *Pour tout $p > 0$, $q \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_0 > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$,*

$$\Sigma_{p,q}[v] \leqslant \frac{1 + C\sqrt{\varepsilon}}{8\,p^2\,\pi^2}\, J_1[v] \quad \forall\, v \in \mathcal{X}^{p,q}_\varepsilon\ . \tag{57}$$

De plus, pour tout $p > 0$, $q \in (0,2)$ et $\varepsilon_0 > 0$, il existe $C > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$,

$$\Sigma_{p,q}[v] \leqslant \frac{1 + C\sqrt{\varepsilon}}{32\, p^2\, \pi^4}\, J_2[v] \quad \forall\, v \in \mathcal{X}^{p,q}_\varepsilon \cap H^2(S^1)\,.$$

4.2.2. Applications à la décroissance de l'entropie. — Dans le cadre des milieux poreux et des diffusions rapides nous obtenons : pour tout $m > 0$, soit u une solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (u^m)_{xx} \quad x \in S^1,\ t > 0, \tag{58}$$

avec pour condition initiale $u(\cdot,0) = u_0$ dans S^1.

Les fonctionnelles d'entropies à considérer sont alors

$$\Sigma_k[u] := \begin{cases} \dfrac{1}{k\,(k+1)} \displaystyle\int_{S^1} \left(u^{k+1} - \bar{u}^{k+1}\right)\, dx & \text{si} \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}\ , \\[2ex] \displaystyle\int_{S^1} u \log\left(\frac{u}{\bar{u}}\right)\, dx & \text{si} \quad k = 0\ , \\[2ex] -\displaystyle\int_{S^1} \log\left(\frac{u}{\bar{u}}\right)\, dx & \text{si} \quad k = -1\ . \end{cases} \tag{59}$$

Ainsi nous obtenons :

Proposition 4.2.4. — *Soit $m \in (0,+\infty)$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{-m\}$, $q = 2\,(k+1)/(m+k)$, $p = (m+k)/2$ et u une solution régulière de* (58).

i) Décroissance algébrique dans le temps court : *si $m > 1$ et $k > -1$, alors*

$$\Sigma_k[u(\cdot,t)] \leqslant \left[\Sigma_k[u_0]^{-(2-q)/q} + \frac{2-q}{q}\, \lambda\, \kappa_{p,q}\, t\right]^{-q/(2-q)} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}^+\ .$$

ii) Décroissance exponentielle pour le temps long : *Si $m > 0$ et $m + k > 0$, il existe $C > 0$ et $t_1 > 0$ tels que*

$$\Sigma_k[u(\cdot,t)] \leqslant \Sigma_k[u(\cdot,t_1)]\, \exp\left(-\frac{8\, p^2\, \pi^2\, \lambda\, \bar{u}^{p(2-q)}\, (t-t_1)}{1 + C\sqrt{\Sigma_k[u(\cdot,t_1)]}}\right) \quad \forall\, t \geqslant t_1\ .$$

Considérons maintenant un cas plus général d'équation d'ordre 4 :

$$u_t = -\Big(u^m\ \left(u_{xxx} + a\, u^{-1}\, u_x\, u_{xx} + b\, u^{-2}\, u_x^3\right)\Big)_x, \quad x \in S^1,\ t > 0\ , \tag{60}$$

avec m, a, $b \in \mathbb{R}$ et une condition initiale $u(\cdot,0) = u_0 \in L^1_+(S^1)$. Cette classe contient deux exemples classiques décrient au-dessus :

$$u_t = -(u^m\, u_{xxx})_x, \tag{61}$$

et

$$u_t = -\Big(u\, (\log u)_{xx}\Big)_{xx}, \tag{62}$$

Notons

$$L_\pm \ := \ \frac{1}{4}(3\,a+5) \pm \frac{3}{4}\sqrt{(a-1)^2 - 8\,b}, \tag{63}$$

et

$$A \;:=\; (k+m+1)^2 - 9\,(k+m-1)^2 + 12\,a\,(k+m-2) - 36\,b\,,$$

où a, b et m sont définis dans (60). Pour ces équations, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 4.2.5. — *Soit u une solution régulière et strictement positive de* (60) *et soient a, b vérifiant* $(a-1)^2 \geq 8\,b$.

i) Décroissance de l'entropie : *Soit k, $m \in \mathbb{R}$ tels que $L_- \leq k+m \leq L_+$. Alors*

$$\frac{d}{dt}\Sigma_k[u(\cdot,t)] \leq 0 \quad \forall\, t > 0\,.$$

ii) Production d'entropie : *Soit k, $m \in \mathbb{R}$ tels que $k+m+1 \neq 0$ et $L_- < k+m < L_+$. Alors A est strictement positif et*

$$\frac{d}{dt}\Sigma_k[u(\cdot,t)] + \mu \int_{S^1} \left|(u^{(k+m+1)/2})_{xx}\right|^2 dx \leq 0 \quad \forall\, t > 0\,,$$

où

$$\mu := \frac{4}{(k+m+1)^4}\,\min\{(k+m+1)^2, A\}\,. \tag{64}$$

Si $k+m+1 = 0$ et $a+b+2-\mu \leq 0$ pour un certain $0 < \mu < 1$, alors

$$\frac{d}{dt}\Sigma_k[u(\cdot,t)] + \mu \int_{S^1} |(\log u)_{xx}|^2\, dx \leq 0 \quad \forall\, t > 0\,.$$

Théorème 4.2.6. — *Soit k, $m \in \mathbb{R}$ tels que $L_- \leq k+m \leq L_+$ et considérons une solution régulière de* (60).

i) Décroissance algébrique en temps court *: si $k > -1$ et $m > 0$, alors*

$$\Sigma_k[u(\cdot,t)] \leqslant \left[\Sigma_k[u_0]^{-(2-q)/q} + 4\pi^2\,\mu\,\kappa_{p,q}\left(\frac{2}{q}-1\right)t\right]^{-q/(2-q)} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}^+\,.$$

ii) Décroissance exponentielle pour le temps long *: Si $m+k+1 > 0$, alors il existe $C > 0$ et $t_1 > 0$ tels que*

$$\Sigma_k[u(\cdot,t)] \leqslant \Sigma_k[u(\cdot,t_1)]\,\exp\left(-\frac{32\,p^2\,\pi^4\,\mu\,\bar{u}^{p(2-q)}\,(t-t_1)}{1+C\sqrt{\Sigma_k[u(\cdot,t_1)]}}\right) \quad \forall\, t \geqslant t_1\,,$$

où μ est définie en (64).

Remarque 4.2.7. — *Ainsi comme les deux théorèmes précédents le montrent, la décroissance de l'entropie pour une équation de diffusion non-linéaire est dans un premier temps polynomiale, puis exponentielle.*

Qu'en est-il pour une diffusion non linéaire sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^n$, comme par exemple une équation des milieux poreux à poids détaillée dans la section 3.4 ? Bien entendu les arguments de compacité utilisés dans cette section ne sont plus valables.

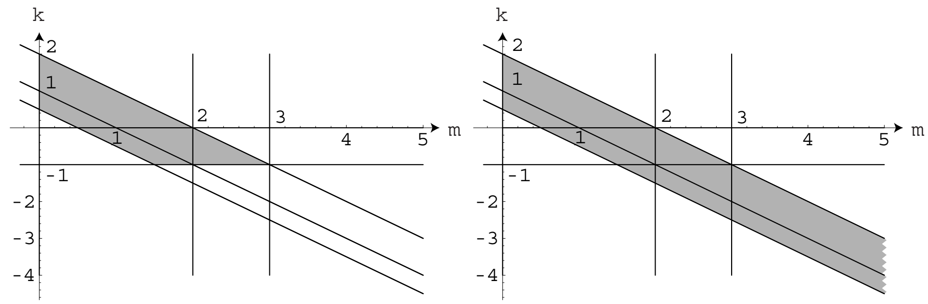

FIGURE 1. *Le graphe de gauche décrit la région admissible pour les paramètres telle que l'entropie décroît de façon algébrique ; le graphe de droite décrit quant à lui la région admissible des paramètre pour obtenir une décroissance exponentielle en temps grand de l'entropie. Ces régions sont décrites dans le théorème 4.2.6 pour l'équation des films minces.*

4.3. Application à l'équation de Lévy-Fokker-Planck

Les résultats de cette section proviennent d'un article écrit en collaboration avec Cyril IMBERT à paraître in *Asymptotic Analysis* : [**GI08**].

Nous étudions ici le comportement asymptotique de l'équation généralisée de Fokker-Planck, dirigée non pas par le laplacien, comme c'est généralement le cas, mais pas le générateur infinitésimal d'un processus de Lévy.

Soit $\mathcal{I}$ un opérateur de Lévy, défini par

$$\mathcal{I}[u](x) = \operatorname{div}(\sigma\nabla u)(x) - b\cdot\nabla u(x) + \int_{\mathbb{R}^d} (u(x+z) - u(x) - \nabla u(x)\cdot zh(z))\nu(dz), \tag{65}$$

où (b, σ, ν) sont les paramètres de l'opérateur, c'est-à-dire $b = (b_i) \in \mathbb{R}^d$, $\sigma = (\sigma_{i,j})$ est une matrice $d \times d$ symétrique définie positive et ν est une mesure appelée *mesure de Lévy* sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant

$$\nu(\{0\}) = 0 \quad \text{et} \quad \int \min(1, |z|^2)\nu(dz) < +\infty, \tag{66}$$

h étant donnée pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ par $h(z) = 1/(1 + |z|^2)$.

L'équation de Lévy-Fokker-Planck est alors :

$$\partial_t u = \mathcal{I}[u] + \operatorname{div}(u\nabla V) \quad x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \tag{67}$$

avec pour condition initiale :

$$u(0, x) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{68}$$

où u_0 est positif et appartenant à $L^1(\mathbb{R}^d)$, et V est un potentiel tel qu'il existe un état stationnaire.

De façon générale, nous essayons de montrer la convergence de la solution u de (67) vers la solution stationnaire :

$$\mathcal{I}[u_\infty] \ + \operatorname{div}(u_\infty \nabla V) = 0 \tag{69}$$

telle que $\int u_\infty = \int u_0 = 1$. La fonction u_∞ est appelée état stationnaire et l'on suppose que celle-ci existe et est positive. Nous allons décrire la convergence au sens de l'entropie, les résultats généralisent alors [**BK03**]. Pour cela, soit $\Phi : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$

une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^2$ et u_∞ positive telle que $\int u_\infty dx = 1$, et définissons la fonctionnelle Φ-entropie : pour tout fonction positive f,

$$\mathrm{Ent}^{\Phi}_{u_\infty}(f) := \int \Phi(f)\, u_\infty dx - \Phi\Big(\int f u_\infty dx\Big).$$

L'inégalité de Jensen assure que $\mathrm{Ent}^{\Phi}_{u_\infty}(f) \geqslant 0$. Montrons maintenant que ces entropies décroissent bien le long des trajectoires.

Proposition 4.3.1. — *Supposons que la condition initiale u_0 soit positive et satisfasse $\int u_0 dx = 1$ et $\mathrm{Ent}^{\Phi}_{u_\infty}\left(\frac{u_0}{u_\infty}\right) < \infty$ avec u_∞, une solution de* (69). *Alors, pour toute fonction convexe $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et pour tout $t \geq 0$, la solution u de* (67)-(68) *satisfait*

$$(70)\quad \forall t \geqslant 0, \quad \frac{d}{dt}\mathrm{Ent}^{\Phi}_{u_\infty}\left(\frac{u}{u_\infty}\right) = -\int \Phi''(v)\nabla v \cdot \sigma \nabla v\, u_\infty dx - \int\int D_\Phi\left(v(t,x), v(t,x-z)\right)\nu(dz)u_\infty(x)dx$$

où D_Φ est la distance de Bregman associée à Φ :

$$(71)\qquad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^+, \quad D_\Phi(a,b) := \Phi(a) - \Phi(b) - \Phi'(b)(a-b) \geq 0,$$

$v(t,x) = \frac{u(t,x)}{u_\infty(x)}$ *et ν est la mesure de Lévy associée à $\mathcal{I}$.*

***Théorème 4.3.2* (Convergence exponentielle à l'équilibre)**

Supposons maintenant que $V(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ et que l'opérateur $\mathcal{I}$ soit un générateur infinitésimal associé à un processus de Lévy ayant comme mesure de Lévy ν. Supposons que ν admette une densité N par rapport à la mesure de Lebesgue et que celle-ci vérifie :

$$(72)\qquad \int_{\mathbb{R}^d \setminus B} \ln|z|\; N(z)\, dz < +\infty$$

où B est la boule unité de $\mathbb{R}^d$. Alors il existe un état stationnaire u_∞, i.e. une solution positive de l'équation (69) *satisfaisant $\int u_\infty dx = 1$.*

De plus, si N est paire et satisfait pour tout $z \in \mathbb{R}^d$,

$$(73)\qquad \int_1^{+\infty} N(sz)s^{d-1}ds \leqslant CN(z)$$

avec une certaine constante $C \geqslant 0$, alors pour toute fonction convexe Φ telle que

$$(74)\qquad \left\{\begin{array}{l} (a,b) \mapsto D_\Phi(a+b,b) \\ (r,y) \mapsto \Phi''(r)y\cdot\sigma y \end{array}\right. \quad \textit{est convexe sur} \quad \left\{\begin{array}{l} \{\, a+b \geq 0, b \geq 0\} \\ \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2d} \end{array}\right. ,$$

la fonctionnelle Φ-entropie appliquée à la solution u de (67)-(68) *converge vers 0 de façon exponentielle. Plus précisément, pour toute condition initiale u_0 telle que $\mathrm{Ent}^{\Phi}_{u_\infty}\left(\frac{u_0}{u_\infty}\right) < \infty$, on a :*

$$(75)\qquad \forall t \geq 0, \quad \mathrm{Ent}^{\Phi}_{u_\infty}\left(\frac{u(t)}{u_\infty}\right) \leqslant e^{-\frac{t}{C}}\mathrm{Ent}^{\Phi}_{u_\infty}\left(\frac{u_0}{u_\infty}\right)$$

avec la constante C provenant de (73).

La preuve de ce résultat est en partie basée sur le théorème suivant du à L. Wu et généralisée par D. Chafai.

Théorème 4.3.3 (**[Wu00, Cha04]**). — *Soit Φ régulière satisfaisant* (74) *et considérons une loi infiniment divisible μ. Alors pour toute fonction positive v,*

$$\mathrm{Ent}_\mu^\Phi(v) \leq \int \Phi''(v)\nabla v \cdot \sigma\nabla v \mu(dx) + \int\int D_\Phi(v(x), v(x+z))\nu_\mu(dz)\mu(dx) \tag{76}$$

où ν_μ et σ représentent respectivement la mesure de Lévy et la matrice de diffusion associée à μ.

Remarque 4.3.4. — *L'égalité $N_\infty = N/\lambda$ est satisfaite si et seulement si ψ est homogène d'ordre $\lambda \in (0,2]$, i.e.*

$$\psi(t\xi) = t^\lambda \psi(\xi) \text{ pour tout } t > 0, \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Dans ce cas, on a $A = \psi/\lambda$ et $b_A = 0$. Ce cas est très particulier, il s'agit des processus de Lévy λ-stables et nous avons dans ce cas égalité. Le cas limite, c'est-à-dire $\lambda = 2$, donne alors $N_\infty = N/2 = 0$.

4.3.1. Remarques et Perspectives. — Nombreuse sont les restrictions dans l'application du théorème 4.3.3.

- En effet, dans le résultat fondamental de la section 4.3, on suppose que $V = x^2$. Cette restriction est indispensable pour les techniques utilisées.

  Cependant, le cas général d'un Fokker-Planck dirigé par un processus de Lévy est intéressant. Une idée est peut-être d'utiliser d'autres distances que l'entropie, plus appropriées aux processus de Lévy. Est-il possible de déduire de ces calculs un critère permettant de retrouver une inégalité de Sobolev logarithmique, comme c'est le cas du critère Γ_2 pour l'équation de Fokker-Planck dirigée par un brownien ?
- De la même manière, les hypothèses demandées au processus de Lévy sont contraignantes. La condition (73) implique qu'il faut être *"proche"* d'un processus λ-stable, et la méthode proposée ici ne permet pas par exemple de traiter le cas d'un processus discret.

Des travaux sont en cours avec Cyril Imbert, Gregorz Karch et Aldéric Joulin dans ces directions.

4.4. Application aux équations de réaction-diffusion

Les résultats présentés ici sont écrits en collaboration avec Boguslaw Zegarlinski, [**GZ08**], et sont en cours de rédaction.

Nous étudions ici le comportement asymptotique de la réaction chimique réversible suivante

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i \mathcal{A}_i \rightleftharpoons \sum_{i=1}^q \beta_i \mathcal{A}_i, \tag{77}$$

où $\mathcal{A}_i$ sont des espèces chimiques qui réagissent entres elles, q est un entier positif et $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$. Nous supposons que les particules doivent diffuser avant de réagir. Nous supposons de plus que pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$, on a $\alpha_i - \beta_i \neq 0$, ainsi nous ne prenons pas en compte les effets d'un catalyseur.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ un ensemble ouvert et borné, on suppose que son bord $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit la diffusion L donnée par :

$$Lf(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(x)\partial_{i,j}^2 f(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i f(x),$$

pour toute fonction régulière f, où $b_{i,j}$ et b_i sont dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et la matrice $(b_{i,j}(x))_{i,j}$ est symétrique positive pour tout $x \in \Omega$. Soit de plus μ une mesure de probabilité réversible pour la diffusion L.

Pour tout $i \in \{1, \cdots, q\}$, soit $v_i(t,x)$ $(t \geqslant 0,\ x \in \Omega)$ la concentration de l'espèce $\mathcal{A}_i$ au temps t à la position x. Les fonctions v_i vérifient les équations de réaction-diffusion :

$$(78)\qquad \begin{cases} \forall t > 0,\ \forall x \in \Omega, & \partial_t v_i(t,x) = Lv_i + (\beta_i - \alpha_i)\left(l\prod_{j=1}^{q} v_j^{\alpha_j} - k\prod_{j=1}^{q} v_j^{\beta_j}\right), \\ \forall x \in \Omega, & v_i(0,x) = v_i^0(x) \\ \forall x \in \partial\Omega,\ \forall t > 0, & \dfrac{\partial v_i}{\partial \nu}(t,x) = 0, \end{cases}$$

où ν représente la normale au bord $\partial\Omega$ et $k, l > 0$ sont les constantes de vitesse des deux réactions chimiques. Les conditions initiales vérifient pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$, $v_i^0 \geqslant 0$ et $\int v_i^0 d\mu > 0$.

Pour simplifier nous supposons que $k = l = 1$, ce qui ne change pas les résultats.

Nous décrivons ici la convergence à l'équilibre de ce système vers un état stationnaire que nous définissons de la façon suivante : Soit $\mathcal{S} = \left\{ (z_i)_{1\leqslant i\leqslant q},\ \text{tel que } \sum_{i=1}^{q} z_i(\beta_i - \alpha_i) = 0 \right\}$. Alors pour tout $(z_i)_{1\leqslant i\leqslant q} \in \mathcal{S}$, on a

$$\partial_t \sum_{i=1}^{q} z_i v_i = L \sum_{i=1}^{q} z_i v_i,$$

ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{q} z_i v_i(t,x) = \mathbf{P_t}\left(\sum_{i=1}^{q} z_i v_i^0\right)(x),$$

où $\mathbf{P_t}$ est le semi-groupe associé à la diffusion L. En particulier

$$\sum_{i=1}^{q} z_i \int v_i(t,x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^{q} z_i \int v_i^0 d\mu.$$

Définition 4.4.1. — Un état stationnaire *de l'équation* (78) *avec des conditions initiales positive* $(v_i^0)_{1\leqslant i\leqslant q}$ *est un vecteur* $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant q} \in (\mathbb{R}^{+*})^q$ *tel que pour tout* $(z_i)_{1\leqslant i\leqslant q} \in \mathcal{S}$ *:*

$$\sum_{i=1}^{q} z_i s_i = \sum_{i=1}^{q} z_i \int v_i^0 d\mu \quad \text{et} \quad \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{q}} \mathrm{s}_\mathrm{i}^{\alpha_\mathrm{i}} = \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{q}} \mathrm{s}_\mathrm{i}^{\beta_\mathrm{i}}.$$

Lemme 4.4.2. — *Soit* $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ *satisfaisant* (78) *avec des conditions initiales satisfaisant* $v_i^0 \geqslant 0$ *et* $\int v_i^0 d\mu > 0$*. Alors il existe un unique état stationnaire* $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ *au système* (78).

La convergence à l'équilibre n'est pas très loin du cas d'une réaction chimique mélangée, c'est-à-dire lorsque la concentration des espèces chimiques ne dépend pas de la position. Dans ce cas l'équation devient

$$\frac{d}{dt}v_i = k_i(\beta_i - \alpha_i)\left(\prod_{j=1}^{q} v_j^{\alpha_j} - \prod_{j=1}^{q} v_j^{\beta_j}\right). \tag{79}$$

Ainsi nous obtenons :

Théorème 4.4.3. — *Soit $(v_j(0))_{1\leqslant j\leqslant q}$ une condition initiale strictement positive. Alors l'équation (79) admet une unique solution définie sur $[0,+\infty)$ qui satisfait pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$,*

$$|v_i(t) - s_i| \leqslant e^K |v_i(0) - s_i| \exp(-Ct),$$

où K est une constante dépendant de l'état stationnaire $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ défini dans le lemme 4.4.2,

$$C = \prod_{i=1}^{q} s_i{}^{\alpha_i} \sum_{i=1}^{q} \frac{(\beta_i - \alpha_i)^2}{s_i}. \tag{80}$$

De plus, C est le taux de convergence optimal.

Ce résultat nous permet de comprendre le cas général, c'est-à-dire lorsque les éléments doivent diffuser avant de pouvoir réagir. Pour cela, nous supposons que la diffusion est définie sur l'ouvert Ω, vérifie un trou spectral (ou de façon équivalente une inégalité de Poincaré) de constante C_{SG} pour la mesure de probabilité réversible μ.

Soit $(v_j^0)_{1\leqslant j\leqslant q}$ une condition initiale vérifiant $1 \leqslant i \leqslant q$, $v_i^0 \geqslant$ sur Ω avec $\int v_i^0 d\mu > 0$.

Théorème 4.4.4. — *Supposons qu'il existe $1 \leqslant i_0, j_0 \leqslant q$ tel que $\beta_{i_0} - \alpha_{i_0} > 0$ et $\beta_{j_0} - \alpha_{j_0} < 0$.*

Pour toutes conditions initiales $(v_i^0)_{1\leqslant i\leqslant q}$ il existe une unique solution faible de (78). C'est-à-dire pour tout $t \in I$, $v_i(\cdot,t) \in L_1(\Omega)$, $G(v_1(\cdot,t),\cdots,v_q(\cdot,t)) \in L_1(\Omega)$,

$$\int_0^t \|G(v_1(\cdot,s),\cdots,v_q(\cdot,s))\|_{L_1} ds < +\infty$$

et de plus pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$, $x \in \Omega$ et $t > 0$,

$$\begin{cases} v_i(t,x) = \mathbf{P_t}\big(v_i^0\big)(x) + k_i(\beta_i - \alpha_i)\displaystyle\int_0^t \mathbf{P}_{t-s}(G(v_1(\cdot,s),\cdots,v_q(\cdot,s)))(x)ds \\ x \in \partial\Omega, \quad \dfrac{\partial v_i}{\partial \nu}(t,x) = 0 \end{cases} \tag{81}$$

qui satisfait aussi pour tout $x \in \Omega$, $v_i(0,x) = v_i^0(x)$.

Soient j_1^+ et j_2^+ les entiers tels que

$$\sup_{j,\text{ t.q. }\beta_j - \alpha_j > 0} \left\{-\frac{\int v_j^0 d\mu}{\beta_j - \alpha_j}\right\} = -\frac{\int v_{j_1^+}^0 d\mu}{\beta_{j_1^+} - \alpha_{j_1^+}}$$

$$\inf_{j,\text{ s.t. } \beta_{\rm j}-\alpha_{\rm i}<0}\left\{-\frac{\int v_j^0 d\mu}{\beta_j-\alpha_j}\right\}=-\frac{\int v_{j_2^-}^0 d\mu}{\beta_{j_2^-}-\alpha_{j_2^-}},$$

et soient j_1^- et j_2^- qui réalisent les extrema dans les autres cas.

Ainsi la convergence asymptotique est donnée par le théorème suivant.

Théorème 4.4.5. — *Supposons qu'il existe $1 \leqslant i_0, j_0 \leqslant q$ tel que $\beta_{i_0}-\alpha_{i_0}>0$ et $\beta_{j_0}-\alpha_{j_0}<0$.*

Soit $(v_i^0)_{1\leqslant i\leqslant q}$ une condition initiale telle que $1 \leqslant i \leqslant q$, $\int v_i^0 d\mu>0$. Supposons de plus que $\alpha_{j_1^+}\beta_{j_1^+}=\alpha_{j_2^+}\beta_{j_2^+}=0$ ou $\alpha_{j_1^-}\beta_{j_1^-}=\alpha_{j_2^-}\beta_{j_2^-}=0$.

Soit $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ l'état stationnaire donné par le lemme 4.4.2. Alors pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$, on obtient

$$\sqrt{\int (v_i-s_i)^2 d\mu} \leqslant K \exp\left(-\min\{a, M\}t\right), \tag{82}$$

où $a>0$ dépend des constantes α_i, β_i et C_{SG}, alors que $M, K>0$ dépendent des conditions initiales.

4.4.1. Remarques et Perspectives. —

- De nombreuses perspectives sont également ouvertes dans cette direction. Nous avons, en particulier, que les espèces diffusaient de la même manière, c'est-à-dire avec la même diffusion L. Nous savons que les problèmes d'existence et de convergence sont alors très différents. Un travail est actuellement en cours avec Boguslaw Zegarlinski.
- De plus, nous devrions pouvoir nous affranchir des restrictions techniques demandées sur les paramètres α et β pour le théorème 4.4.5.

CHAPITRE 5

FILTRAGE NON-LINÉAIRE ET SYSTÈMES DE PARTICULES EN INTERACTION

Les résultats présentés ici proviennent d'une publication écrite en collaboration avec Bruno RÉMILLARD à paraître in *Advances in Applied Probability* : [**GR08**].

Ce chapitre est indépendant de ce qui précède.

Soit $(X_k)_{k\geq 0}$ une chaîne de Markov non-homogène dans un espace métrique localement compact E, de noyau de transition $(K_n)_{n\geq 1}$ avec pour loi initiale η_0 définie sur la tribu borelienne $\mathcal{B}(E)$. De plus soit $\mathcal{B}_b(E)$ l'ensemble des fonctions bornées mesurables $\mathcal{B}(E)$.

Soit une suite $(g_n)_{n\geq 1}$ de fonctions positives dans l'ensemble $\mathcal{B}_b(E)$; supposons que nous voulons calculer de façon récursive la formule de Feynman-Kac $(\eta_n)_{n\geq 1}$:

$$\eta_n(f) = \frac{\gamma_n(f)}{\gamma_n(1)}, \quad f \in \mathcal{B}_b(E), \tag{83}$$

où

$$\gamma_n(f) = E\left(f(X_n)\prod_{k=1}^{n} g_k(X_{k-1})\right). \tag{84}$$

En utilisant les notations de [**CDML99**] et [**DMM00**], notons par $M_1(E)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $(E, \mathcal{B}(E))$. Si $\mu \in M_1(E)$ et $n \geq 0$, soit μK_n la mesure de probabilité définie sur $\mathcal{B}_b(E)$ par

$$\mu K_n(f) = \mu(K_n f) = \int_E \int_E f(z) K_n(x, dz)\mu(dx).$$

Décomposons les étapes pour mieux comprendre la relation entre les η_n, pour tout $n \geq 1$, soit $\psi_n : M_1(E) \mapsto M_1(E)$ définie par

$$\psi_n(\eta)f = \frac{\eta(g_n f)}{\eta(g_n)}, \quad \eta \in M(E), f \in \mathcal{B}_b(E),$$

et soit Φ_n définie par

$$\Phi_n(\eta) = \psi_n(\eta)K_n.$$

Ainsi on a pour tout $n \geq 1$,

$$\eta_n = \Phi_n(\eta_{n-1}). \tag{85}$$

Notons que pour tout $n \geq 1$, l'opérateur Φ_n peut-être décomposé de la façon suivante :

(86)
$$\begin{aligned} \hat{\eta}_n &= \psi_{n+1}(\eta_n), \\ \eta_{n+1} &= \hat{\eta}_n K_{n+1}, \end{aligned} \qquad n \geq 0,\ \eta_0 \in M_1(E).$$

Même si le système entre les équations est simple il n'est pas facile de le résoudre directement. C'est pour cela que des algorithmiques d'approximations à l'aide de particules sont développés pour approcher $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ces algorithmes particulaires utilisent la décomposition (86), où les particules sont sélectionnées dans la première étape, puis évoluent selon le noyau markovien dans la seconde étape. Ces algorithmes sont appelés *algorithmes génétiques*. On pourra consulter les articles de synthèse suivants [**DMM00, CD02, DM04**].

La vitesse de convergence de ces algorithmes dépend des deux étapes mentionnées précédemment, nous nous intéressons ici à la première étape : celle de la sélection.

Nous supposons que pour tout $n \geq 1$,

$$0 < \inf_{x\in E} g_n(x) \leqslant \sup_{x\in E} g_n(x) < +\infty.$$

L'algorithme général. — Soit N un entier représentant le nombre de particules, pour tout $n \geq 0$, posons $\xi_n = \left\{\xi_n^1, \cdots, \xi_n^N\right\}$ les particules au temps n et posons

$$\eta_n^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{\xi_n^i}.$$

- Au temps $n = 0$, le système initial de particules $\xi_0 = \left\{\xi_0^1, \cdots, \xi_0^N\right\}$ consiste en N variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi η_0.
- Pour tout $n \geq 1$, le système de particules $\xi_n = \left\{\xi_n^1, \cdots, \xi_n^N\right\}$ consiste en N particules, et s'obtient de la façon suivante :
  - (Sélection) On calcule le vecteur des poids $W_n \in (0,1)^N$, où

(87)
$$W_n^i = \frac{g_n(\xi_{n-1}^i)}{\sum_{i=1}^N g_n(\xi_{n-1}^i)}, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

    Nous sélectionnons ensuite les particules $\hat{\xi}_{n-1} = \left\{\hat{\xi}_{n-1}^1, \ldots, \hat{\xi}_{n-1}^N\right\}$ à partir des particules ξ_{n-1} et selon les poids (W_n^i).
  - (Evolutions/Mutation) Etant données les particules $\hat{\xi}_{n-1}$, les nouvelles particules ξ_n consistent en N particules indépendantes selon la loi $K_n(\hat{\xi}_{n-1}^i, dx)$, $1 \leqslant i \leqslant N$. D'une autre façon, pour tout $z = (z^1, \ldots, z^N) \in E^N$,

$$P\Big(\xi_n \in dx | \hat{\xi}_{n-1} = z\Big) = \bigotimes_{i=1}^N K_n(z^i, dx^i).$$

Pour décrire la manière dont les particules sont sélectionnées, il suffit de décrire les nombres $M_n^1, \ldots, M_n^N \in \{0, 1, \ldots, N\}$, où M_n^i représente le nombre de particules de type i qui vont rester pour l'étape suivante. Ainsi, on peut écrire

$$\hat{\eta}_{n-1}^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{\hat{\xi}_{n-1}^i} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N M_n^i \delta_{\xi_{n-1}^i}.$$

Une méthode de sélection est dite *non biaisée* si pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ et pour tout $k \geq 1$, $E(M_k^i | \xi_{k-1}) = NW_k^i$.

Sélection selon la méthode du choix systématique. — L'algorithme que nous étudions est basée sur une méthode de sélection appelée ici celle du *choix systématique*. Elle apparaît une première fois dans [**Bak87**], mais aucun théorème de convergence n'est associé.

Cette méthode de sélection est très simple et peut-être décrite de la manière suivante : pour $n \geq 1$, soit U_n une loi uniforme sur $[0,1)$ et soit pour $w \in [0,1]$, $M(w, U_n) := [Nw + U_n]$, où $[x]$ est la partie entière de x. Alors nous posons

$$\begin{aligned} M_n^1 &:= M(W_n^1, U_n), \\ M_n^k &:= M(W_n^1 + \cdots + W_n^k, U_n) - M(W_n^1 + \cdots + W_n^{k-1}, U_n), \quad k = 2, \ldots, N. \end{aligned}$$

Puisque $M(1, U_n) = N$, nous avons $\sum_{i=1}^N M_n^i = N$. Ainsi le nombre de particules reste constant à chaque étape.

Etude de la convergence. — De façon générale, l'intérêt de ces algorithmes génétiques est la convergence lorsque N tend vers l'infini vers la loi cible. La façon la plus simple est d'obtenir un théorème de convergence L^2. Le théorème suivant nous donne une condition générale.

Théorème 5.0.6. — *Soit (a_N) une suite croissante telle que $a_N/N \to 0$, lorsque $N \to \infty$. Supposons que la méthode de sélection soit non biaisée, alors*

$$\lim_{N \to \infty} a_N \max_{1 \leq k \leq n} \|\eta_k^N - \eta_k\|_2^2 = 0$$

si et seulement si pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_b(E)$,

$$\lim_{N \to \infty} a_N \max_{1 \leq k \leq n} E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N (M_k^i - NW_k^i) f(\xi_{k-1}^i)\right)^2\right] = 0. \tag{88}$$

De plus, $\sup_{N \geq 1} a_N \max_{1 \leq k \leq n} \|\eta_k^N - \eta_k\|_2^2$ *est finie si et seulement si*

$$\sup_{N \geq 1} a_N \max_{1 \leq k \leq n} E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N (M_k^i - NW_k^i) f(\xi_{k-1}^i)\right)^2\right] < \infty.$$

Cette condition n'est toutefois pas vérifiée dans le cas de notre sélection :

Remarque 5.0.7. — *L'inégalité* (88) *n'est en effet pas valide de façon générale dans le cas de la sélection systématique. En voici une illustration : soit $N = 2m$, et posons pour tout $i \in \{1, \cdots, N/2\}$, $W_n^{2i} = 1/(2N)$, et $W_n^{2i-1} = 3/(2N)$. Alors on peut vérifier que pour tout $1 \leq i \leq N/2$,*

$$\begin{aligned} M_n^{2i-1} &= 1 \text{ si } U_n \in [0, 1/2), & M_n^{2i-1} &= 2 \text{ si } U_n \in [1/2, 1), \\ M_n^{2i} &= 1 \text{ si } U_n \in [0, 1/2), & M_n^{2i} &= 0 \text{ si } U_n \in [1/2, 1). \end{aligned}$$

Si $1 \leq i \leq N/2$, posons alors $q^{2i} = 1$ et $q^{2i-1} = -1$. Il vient par suite :

$$E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N (M_k^i - NW_k^i) q^i\right)^2 \middle| \xi_{k-1}\right] = \frac{1}{4},$$

ce qui met en défaut l'inégalité (88).

La description de cet algorithme montre qu'il n'est pas très gourmand en calcul. En revanche, il résulte de la remarque précédente que la convergence L^2 n'est pas si simple à obtenir.

Nous n'avons pas été en mesure à ce jour de démontrer cette convergence, mais nous avançons toutefois la conjecture suivante :

Conjecture 5.0.8. — *Supposons que η_0 et $(K_n)_{n\geq 1}$ soient des lois absolument continues et considérons les entiers $M_n^1, \ldots, M_n^N$ obtenus en utilisant la méthode de sélection systématique. Alors pour tout $f \in \mathcal{B}_b(E)$ et $n \geq 0$, on a.*

$$\lim_{N\to\infty} E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(M_n^i - NW_n^i)f(\xi_{n-1}^i)\right)^2\right] = 0. \tag{89}$$

L'inégalité (89) nous assure la convergence L^2 du système de particules.

Dans [**GR08**], quelques résultats sont obtenus dans la direction de la conjecture. On peut remarquer que le cas $n = 0$ est évident, c'est la loi des grands nombres. Nous traitons, presque entièrement le cas $n = 1$. Mais la complication des calculs ne nous a pas permis de conclure.

Notons par ailleurs dans [**GR08**], qu'une comparaison entre différentes méthodes de sélections est proposée. Nous nous appuyons pour cela sur un cadre de fitrage non linéaire où il est possible d'expliciter directement les mesures η_n, et nous effectuons les simulations associées. Ce modèle est décrit dans un article écrit en collaboration avec Bruno Rémillard et Pierre Del Moral, [**GRDM05**].

BIBLIOGRAPHIE

[ABC$^+$00] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, and G. Scheffer. *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, volume 10 of *Panoramas et Synthèses*. Société Mathématique de France, Paris, 2000. With a preface by D. Bakry and M. Ledoux.

[AGK04] M. Agueh, N. Ghoussoub, and X. Kang. Geometric inequalities via a general comparison principle for interacting gases. *Geom. Funct. Anal.*, 14(1) :215–244, 2004.

[Bak87] J. E. Baker. Reducing bias and inefficiency in the selection algorithm. In *Proc. of the Second International Conf. on Genetic Algorithms amd their Applications*, pages 14–21. L. Erlbaum Associates, 1987.

[Bar94] G. Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, volume 17 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Paris, 1994.

[BCG03] M. Bonforte, F. Cipriani, and G. Grillo. Ultracontractivity and convergence to equilibrium for supercritical quasilinear parabolic equations on Riemannian manifolds. *Adv. Differential Equations*, 8(7) :843–872, 2003.

[BCL97] D. Bakry, D. Concordet, and M. Ledoux. Optimal heat kernel bounds under logarithmic Sobolev inequalities. *ESAIM Probab. Statist.*, 1 :391–407 (electronic), 1995/97.

[BCLSC95] D. Bakry, T. Coulhon, M. Ledoux, and L. Saloff-Coste. Sobolev inequalities in disguise. *Indiana Univ. Math. J.*, 44(4) :1033–1074, 1995.

[BCR05] F. Barthe, P. Cattiaux, and C. Roberto. Concentration for independent random variables with heavy tails. *AMRX*, 2005(2) :39–60, 2005.

[BCR06] F. Barthe, P. Cattiaux, and C. Roberto. Interpolated inequalities between exponential and Gaussian, Orlicz hypercontractivity and isoperimetry. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 22(3) :993–1067, 2006.

[BCR07] F. Barthe, P. Cattiaux, and C. Roberto. Isoperimetry between exponential and Gaussian. *Electron. J. Probab.*, 12 :no. 44, 1212–1237 (electronic), 2007.

[Bec89] W. Beckner. A generalized Poincaré inequality for Gaussian measures. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 105(2) :397–400, 1989.

[Bec99] W. Beckner. Geometric asymptotics and the logarithmic Sobolev inequality. *Forum Math.*, 11(1) :105–137, 1999.

[BG99] S. G. Bobkov and F. Götze. Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequalities. *J. Funct. Anal.*, 163(1) :1–28, 1999.

[BG06] M. Bonforte and G. Grillo. Super and ultracontractive bounds for doubly nonlinear evolution equations. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 22(1) :111–129, 2006.

[BGL01] S. G. Bobkov, I. Gentil, and M. Ledoux. Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 80(7) :669–696, 2001.

[BK03] P. Biler and G. Karch. Generalized Fokker-Planck equations and convergence to their equilibria. In *Evolution equations (Warsaw, 2001)*, volume 60 of *Banach Center Publ.*, pages 307–318. Polish Acad. Sci., Warsaw, 2003.

[BL00] S. G. Bobkov and M. Ledoux. From Brunn-Minkowski to Brascamp-Lieb and to logarithmic Sobolev inequalities. *Geom. Funct. Anal.*, 10(5) :1028–1052, 2000.

[BR03] F. Barthe and C. Roberto. Sobolev inequalities for probability measures on the real line. *Studia Math.*, 159(3), 2003.

[BR07] F. Barthe and C. Roberto. Modified log-Sobolev inequalities on R. *Prépublication*, 2007.

[BZ05] S. G. Bobkov and B. Zegarlinski. Entropy bounds and isoperimetry. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 176(829) :x+69, 2005.

[Car91] E. A. Carlen. Superadditivity of Fisher's information and logarithmic Sobolev inequalities. *J. Funct. Anal.*, 101(1) :194–211, 1991.

[CD02] D. Crisan and A. Doucet. A survey of convergence results on particle filtering methods for practitioners. *IEEE Trans. Signal Process.*, 50(3) :736–746, 2002.

[CDGJ06] J. A. Carrillo, J. Dolbeault, I. Gentil, and A. Jüngel. Entropy-energy inequalities and improved convergence rates for nonlinear parabolic equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 6(5) :1027–1050 (electronic), 2006.

[CDML99] D. Crisan, P. Del Moral, and T. Lyons. Discrete filtering using branching and interacting particle systems. *Markov Process. Related Fields*, 5(3) :293–318, 1999.

[CENV04] D. Cordero-Erausquin, B. Nazaret, and C. Villani. A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities. *Adv. Math.*, 182(2) :307–332, 2004.

[CGG07] P. Cattiaux, I. Gentil, and A. Guillin. Weak logarithmic sobolev inequalities and entropic convergence. *Probab. Theory Related Fields*, 139(3-4) :563–603, 2007.

[Cha04] D. Chafaï. Entropies, convexity, and functional inequalities : on Φ-entropies and Φ-Sobolev inequalities. *J. Math. Kyoto Univ.*, 44(2) :325–363, 2004.

[Che05] M.F. Chen. Capacitary criteria for Poincaré-type inequalities. *Potential Anal.*, 23(4) :303–322, 2005.

[DGGW08] J. Dolbeault, I. Gentil, A. Guillin, and F.Y. Wang. L^q-functional inequalities and weighted porous media equations. *Potential Anal.*, 28(1) :35–59, 2008.

[DGJ06] J. Dolbeault, I. Gentil, and A. Jüngel. A logarithmic fourth-order parabolic equation and related logarithmic Sobolev inequalities. *Commun. Math. Sci.*, 4(2) :275–290, 2006.

[DLSS91] B. Derrida, J. L. Lebowitz, E. R. Speer, and H. Spohn. Fluctuations of a stationary nonequilibrium interface. *Phys. Rev. Lett.*, 67(2) :165–168, 1991.

[DM04] P. Del Moral. *Feynman-Kac formulae. Genealogical and interacting particle systems with applications.* Probability and Its Applications. New York, NY : Springer. xviii, 555 p., 2004.

[DMM00] P. Del Moral and L. Miclo. Branching and interacting particle systems approximations of Feynman-Kac formulae with applications to nonlinear filtering. In *Séminaire de Probabilités, XXXIV*, volume 1729 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–145. Springer, Berlin, 2000.

[DPD02a] M. Del Pino and J. Dolbeault. Best constants for Gagliardo-Nirenberg inequalities and applications to nonlinear diffusions. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 81(9) :847–875, 2002.

[DPD02b] M. Del Pino and J. Dolbeault. Nonlinear diffusions and optimal constants in Sobolev type inequalities : asymptotic behaviour of equations involving the p-Laplacian. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334(5) :365–370, 2002.

[DPD03a] M. Del Pino and J. Dolbeault. Asymptotic behavior of nonlinear diffusions. *Math. Res. Lett.*, 10(4) :551–557, 2003.

[DPD03b] M. Del Pino and J. Dolbeault. The optimal Euclidean L^p-Sobolev logarithmic inequality. *J. Funct. Anal.*, 197(1) :151–161, 2003.

[DPDG04] M. Del Pino, J. Dolbeault, and I. Gentil. Nonlinear diffusions, hypercontractivity and the optimal L^p-Euclidean logarithmic Sobolev inequality. *J. Math. Anal. Appl.*, 293(2) :375–388, 2004.

[Eva98] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[ÉY87] M. Émery and J.E. Yukich. A simple proof of the logarithmic Sobolev inequality on the circle. In *Séminaire de Probabilités, XXI*, pages 173–175. Springer, Berlin, 1987.

[Gen02] I. Gentil. Ultracontractive bounds on Hamilton-Jacobi solutions. *Bull. Sci. Math.*, 126(6) :507–524, 2002.

[Gen03] I. Gentil. The general optimal L^p-Euclidean logarithmic Sobolev inequality by Hamilton-Jacobi equations. *J. Funct. Anal.*, 202(2) :591–599, 2003.

[Gen06] I. Gentil. Inégalités de sobolev logarithmique et de Poincaré pour la loi uniforme. *Note non publiée*, 2006.

[Gen08] I. Gentil. From the Prékopa-Leindler inequality to modified logarithmic sobolev inequality. *A paraître in Ann. Fac. Sci. Toulouse*, 2008.

[GGM05] I. Gentil, A. Guillin, and L. Miclo. Modified logarithmic Sobolev inequalities and transportation inequalities. *Probab. Theory Related Fields*, 133(3) :409–436, 2005.

[GGM07] I. Gentil, A. Guillin, and L. Miclo. Modified logarithmic sobolev inequalities in null curvature. *Rev. Matematica Iberoamericana*, 23(1) :237–260, 2007.

[GI08] I. Gentil and C. Imbert. The Lévy-Fokker-planck equation : Phi-entropies and convergence to equilibrium. *A paraître in Asymptot. Anal.*, 2008.

[GLT07] P. Goncalves, C. Landim, and C. Toninelli. Hydrodynamic limit for a particle system with degenerate rates. *Prépublication*, 2007.

[Goz07] N. Gozlan. Characterization of Talagrand's like transportation-cost inequalities on the real line. *J. Funct. Anal.*, 250(2) :400–425, 2007.

[GR08] I. Gentil and B. Rémillard. Using systematic sampling selection for Monte Carlo solutions of Feynman-Kac equations. *A paraître in Advances in Applied Probability*, 2008.

[GRDM05] I. Gentil, B. Rémillard, and P. Del Moral. Filtering of images for detecting multiple targets trajectories. In *Statistical modeling and analysis for complex data problems*, volume 1 of *GERAD 25th Anniv. Ser.*, pages 267–280. Springer, New York, 2005.

[Gri99] A. Grigor′yan. Isoperimetric inequalities and capacities on Riemannian manifolds. In *The Maz′ya anniversary collection, Vol. 1 (Rostock, 1998)*, volume 109 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 139–153. Birkhäuser, Basel, 1999.

[Gro75] L. Gross. Logarithmic Sobolev inequalities. *Amer. J. Math.*, 97(4) :1061–1083, 1975.

[GZ08] I. Gentil and B. Zegarlinski. Asymptotic behaviour of a general reversible chemical reaction-diffusion equation. *En préparation*, 2008.

[Kol07] A. V. Kolesnikov. Modified log-Sobolev inequalities and isoperimetry. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 18(2) :179–208, 2007.

[Led00] M. Ledoux. The geometry of Markov diffusion generators. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 9(2) :305–366, 2000. Probability theory.

[LO00] R. Latala and K. Oleszkiewicz. Between Sobolev and Poincaré. In *Geometric aspects of functional analysis*, volume 1745 of *Lecture Notes in Math.*, pages 147–168. Springer, Berlin, 2000.

[Mau05] B. Maurey. Inégalité de Brunn-Minkowski-Lusternik, et autres inégalités géométriques et fonctionnelles. *Astérisque*, (299) :Exp. No. 928, vii, 95–113, 2005. Séminaire Bourbaki. Vol. 2003/2004.

[Maz85] V. G. Maz'ja. *Sobolev spaces*. Springer Series in Soviet Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1985. Translated from the Russian by T. O. Shaposhnikova.

[Muc72] B. Muckenhoupt. Hardy's inequality with weights. *Studia Math.*, 44 :31–38, 1972. collection of articles honoring the completion by Antoni Zygmund of 50 years of scientific activity.

[Naz06] B. Nazaret. Best constant in Sobolev trace inequalities on the half-space. *Nonlinear Anal.*, 65(10) :1977–1985, 2006.

[Rot80] O.S. Rothaus. Logarithmic sobolev inequalities and the spectrum of sturm-liouville operators. *J. Funct. Anal.*, 39 :42–56, 1980.

[Roy99] G. Royer. *Une initiation aux inégalités de Sobolev logarithmiques*. S.M.F., Paris, 1999.

[Tal95] M. Talagrand. Concentration of measure and isoperimetric inequalities in product spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (81) :73–205, 1995.

[Var85] N. Th. Varopoulos. Hardy-Littlewood theory for semigroups. *J. Funct. Anal.*, 63(2) :240–260, 1985.

[Wan00] F. Y. Wang. Functional inequalities for empty essential spectrum. *J. Funct. Anal.*, 170(1) :219–245, 2000.

[Wei78a] F. B. Weissler. Logarithmic Sobolev inequalities for the heat-diffusion semigroup. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 237 :255–269, 1978.

[Wei78b] F. B. Weissler. Logarithmic Sobolev inequalities for the heat-diffusion semigroup. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 237 :255–269, 1978.

[Wu00] L. Wu. A new modified logarithmic Sobolev inequality for Poisson point processes and several applications. *Probab. Theory Related Fields*, 118(3) :427–438, 2000.