Petites parties du cercle et opérateurs mélangeants

Frédéric Bayart

Université Clermont-Ferrand 2

Septembre 2012

Théorie ergodique

(travail en commun avec Étienne Matheron et d'autres...).

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace probabilisé et soit
$T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ une application mesurable.

Définition

On dit que T **préserve la mesure** si $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}$.

Soit $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ une transformation qui préserve la mesure.

- T est appelée **ergodique** si

$$\forall A, B \subset \mathcal{B},\ \mu(A)\mu(B) > 0 \implies \exists n \geq 0, T^n(A) \cap B \neq \varnothing;$$

- T est appelée **faiblement mélangeante** si

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\mu(A \cap T^{-n}(B)) - \mu(A)\mu(B)| = 0 \ (A, B \in \mathcal{B});$$

- T est appelée **fortement mélangeante** si

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap T^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B) \ \ (A, B \in \mathcal{B}).$$

Exemple - Transformation dyadique

Soient $X = [0, 1)$, $\mathcal{B}$ la tribu borélienne et soit μ la mesure de Lebesgue sur X. Alors

$$\begin{aligned} T : (X, \mathcal{B}, \mu) &\rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu) \\ x &\mapsto 2x \mod 1 \end{aligned}$$

est ergodique.

Exemple - "Bernoulli shift"

Soient $X = \{-1,1\}^{\mathbb{Z}}$, $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par les cylindres

$$\{x \in X;\ (x_n, \dots, x_p) \in E_n \times \cdots \times E_p\},\ \ E_j \subset \{-1,1\}.$$

μ_k est définie par $\mu_k(\{1\}) = 1/2$ et $\mu_k(\{-1\}) = 1/2$. Soit $\mu = \cdots \otimes \mu_{-1} \otimes \mu_0 \otimes \mu_1 \otimes \dots$, c'est-à-dire

$$\mu\big(\{x \in X;\ (x_n, \dots, x_p) \in E_n \times \cdots \times E_p\}\big) = \mu_n(E_n) \times \cdots \times \mu_p(E_p).$$

Alors

$$\begin{aligned} T : (X, \mathcal{B}, \mu) &\to (X, \mathcal{B}, \mu) \\ (x_n) &\mapsto (x_{n+1}) \end{aligned}$$

est ergodique.

Notre contexte

X est un espace de Banach séparable complexe.
$T \in \mathfrak{L}(X)$ est un opérateur borné sur X.
Existe-t-il une mesure borélienne *non-dégénérée* μ sur X de sorte que le système dynamique (T, μ) soit ergodique ?

Questions à résoudre

- Quel type de mesure faut-il considérer ?
- Étant donné $T \in \mathfrak{L}(X)$ et une mesure μ sur X, comment prouver que T préserve la mesure ?
- Étant donné $T \in \mathfrak{L}(X)$ et une mesure μ sur X, comment prouver que T est ergodique par rapport à μ ?
- Quelles conditions sur $T \in \mathfrak{L}(X)$ assurent que l'on peut construire une mesure μ sur X de sorte que le système dynamique (T, μ) soit ergodique ?

Questions à résoudre

- Quel type de mesure faut-il considérer ?
- Étant donné $T \in \mathfrak{L}(X)$ et une mesure μ sur X, comment prouver que T préserve la mesure ?
- Étant donné $T \in \mathfrak{L}(X)$ et une mesure μ sur X, comment prouver que T est ergodique par rapport à μ ?
- Quelles conditions sur $T \in \mathfrak{L}(X)$ assurent que l'on peut construire une mesure μ sur X de sorte que le système dynamique (T, μ) soit ergodique ?

Questions à résoudre

- Quel type de mesure faut-il considérer ?
- Étant donné $T \in \mathfrak{L}(X)$ et une mesure μ sur X, comment prouver que T préserve la mesure ?
- Étant donné $T \in \mathfrak{L}(X)$ et une mesure μ sur X, comment prouver que T est ergodique par rapport à μ ?
- Quelles conditions sur $T \in \mathfrak{L}(X)$ assurent que l'on peut construire une mesure μ sur X de sorte que le système dynamique (T, μ) soit ergodique ?

Questions à résoudre

- Quel type de mesure faut-il considérer ?
- Étant donné $T \in \mathfrak{L}(X)$ et une mesure μ sur X, comment prouver que T préserve la mesure ?
- Étant donné $T \in \mathfrak{L}(X)$ et une mesure μ sur X, comment prouver que T est ergodique par rapport à μ ?
- Quelles conditions sur $T \in \mathfrak{L}(X)$ assurent que l'on peut construire une mesure μ sur X de sorte que le système dynamique (T, μ) soit ergodique ?

Préliminaires - mesures gaussiennes

Définition

Une **mesure gaussienne** sur X est une mesure de probabilité μ sur X telle que chaque forme linéaire continue $x^* \in X^*$ est une variable aléatoire gaussienne sur $(X, \mathcal{B}, \mu)$ d'espérance nulle.

Les variables gaussiennes sur $\mathbb{R}$ sont caractérisées par leur moyenne et leur variance.
Les vecteurs gaussiens sur $\mathbb{R}^d$ sont caractérisés par leur moyenne et leur matrice de covariance.

Définition

Une **mesure gaussienne** sur X est une mesure de probabilité μ sur X telle que chaque forme linéaire continue $x^* \in X^*$ est une variable aléatoire gaussienne sur $(X, \mathcal{B}, \mu)$ d'espérance nulle.

Les variables gaussiennes sur $\mathbb{R}$ sont caractérisées par leur moyenne et leur variance.

Les vecteurs gaussiens sur $\mathbb{R}^d$ sont caractérisés par leur moyenne et leur matrice de covariance.

Préliminaires - mesures gaussiennes

Définition

Une **mesure gaussienne** sur X est une mesure de probabilité μ sur X telle que chaque forme linéaire continue $x^* \in X^*$ est une variable aléatoire gaussienne sur $(X, \mathcal{B}, \mu)$ d'espérance nulle.

Les variables gaussiennes sur $\mathbb{R}$ sont caractérisées par leur moyenne et leur variance.
Les vecteurs gaussiens sur $\mathbb{R}^d$ sont caractérisés par leur moyenne et leur matrice de covariance.

L'opérateur de covariance

Théorème

Soit μ une mesure gaussienne sur X.

(1) *On peut définir un opérateur semi-linéaire continu $R_\mu : X^* \to X$ tel que, pour tous $(x^*, y^*) \in X^* \times X^*$:*

$$\langle R_\mu(x^*), y^* \rangle = \int_X \overline{\langle x^*, z \rangle} \, \langle y^*, z \rangle \, d\mu(z) = \langle x^*, y^* \rangle_{L^2(\mu)} .$$

*L'opérateur R_μ est appelé l'**opérateur de covariance** de μ.*

(2) *Deux mesures gaussiennes sur X coincident si et seulement si elles ont le même opérateur de covariance.*

Mesures gaussiennes et opérateurs

Théorème (Rudnicki (1993))

Soit μ une mesure gaussienne sur X admettant R pour opérateur de covariance et soit $T \in \mathfrak{L}(X)$.

- *T préserve la mesure si et seulement si $TRT^* = R$.*
- *(T, μ) est faiblement mélangeant si et seulement si, pour tous $x^*, y^* \in X^*$, on a*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\langle RT^{*n}(x^*), y^*\rangle| = 0.$$

- *(T, μ) est fortement mélangeant si et seulement si, pour tous $x^*, y^* \in X^*$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \langle RT^{*n}(x^*), y^*\rangle = 0.$$

Questions à résoudre

- Quel type de mesure faut-il considérer ? OK.
- Étant donné $T \in \mathfrak{L}(X)$ et une mesure μ sur X, comment prouver que T préserve la mesure ? OK.
- Étant donné $T \in \mathfrak{L}(X)$ et une mesure μ sur X, comment prouver que T est ergodique par rapport à μ ? OK.
- Quelles conditions sur $T \in \mathfrak{L}(X)$ assurent que l'on peut construire une mesure μ sur X de sorte que le système dynamique (T, μ) soit ergodique ?
- Comment construire une mesure gaussienne sur X ?
- Comment associer "canoniquement" à $T \in \mathfrak{L}(X)$ une mesure gaussienne sur X ?

Questions à résoudre

- Quel type de mesure faut-il considérer ? OK.
- Étant donné $T \in \mathfrak{L}(X)$ et une mesure μ sur X, comment prouver que T préserve la mesure ? OK.
- Étant donné $T \in \mathfrak{L}(X)$ et une mesure μ sur X, comment prouver que T est ergodique par rapport à μ ? OK.
- Quelles conditions sur $T \in \mathfrak{L}(X)$ assurent que l'on peut construire une mesure μ sur X de sorte que le système dynamique (T, μ) soit ergodique ?
- Comment construire une mesure gaussienne sur X ?
- Comment associer "canoniquement" à $T \in \mathfrak{L}(X)$ une mesure gaussienne sur X ?

Questions à résoudre

- Quel type de mesure faut-il considérer ? OK.
- Étant donné $T \in \mathfrak{L}(X)$ et une mesure μ sur X, comment prouver que T préserve la mesure ? OK.
- Étant donné $T \in \mathfrak{L}(X)$ et une mesure μ sur X, comment prouver que T est ergodique par rapport à μ ? OK.
- Quelles conditions sur $T \in \mathfrak{L}(X)$ assurent que l'on peut construire une mesure μ sur X de sorte que le système dynamique (T, μ) soit ergodique ?
- Comment construire une mesure gaussienne sur X ?
- Comment associer "canoniquement" à $T \in \mathfrak{L}(X)$ une mesure gaussienne sur X ?

Questions à résoudre

- Quel type de mesure faut-il considérer ? OK.
- Étant donné $T \in \mathfrak{L}(X)$ et une mesure μ sur X, comment prouver que T préserve la mesure ? OK.
- Étant donné $T \in \mathfrak{L}(X)$ et une mesure μ sur X, comment prouver que T est ergodique par rapport à μ ? OK.
- Quelles conditions sur $T \in \mathfrak{L}(X)$ assurent que l'on peut construire une mesure μ sur X de sorte que le système dynamique (T, μ) soit ergodique ?
- Comment construire une mesure gaussienne sur X ?
- Comment associer "canoniquement" à $T \in \mathfrak{L}(X)$ une mesure gaussienne sur X ?

Questions à résoudre

- Quel type de mesure faut-il considérer ? OK.
- Étant donné $T \in \mathfrak{L}(X)$ et une mesure μ sur X, comment prouver que T préserve la mesure ? OK.
- Étant donné $T \in \mathfrak{L}(X)$ et une mesure μ sur X, comment prouver que T est ergodique par rapport à μ ? OK.
- Quelles conditions sur $T \in \mathfrak{L}(X)$ assurent que l'on peut construire une mesure μ sur X de sorte que le système dynamique (T, μ) soit ergodique ?
- Comment construire une mesure gaussienne sur X ?
- Comment associer "canoniquement" à $T \in \mathfrak{L}(X)$ une mesure gaussienne sur X ?

Opérateurs γ-radonifiants

Soit (g_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant $\mathcal{N}(0,1)$.

Définition

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. Un opérateur $K \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}, X)$ est dit γ-**radonifiant** si pour une (pour toute) base orthonormale (e_n) de $\mathcal{H}$, la série $\sum g_n(\omega)K(e_n)$ converge presque sûrement.

Un opérateur γ-radonifiant $K : \mathcal{H} \to X$ définit une unique mesure gaussienne, la distribution de la somme $\sum g_n(\omega)K(e_n)$, d'opérateur de covariance $R = KK^*$.

Si X est un espace de Hilbert, γ-radonifiants $=$ Hilbert-Schmidt.

En règle générale, K est γ-radonifiant dès que $\sum_n \|Ke_n\| < +\infty$.

Opérateurs γ-radonifiants

Soit (g_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant $\mathcal{N}(0,1)$.

Définition

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. Un opérateur $K \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}, X)$ est dit γ-**radonifiant** si pour une (pour toute) base orthonormale (e_n) de $\mathcal{H}$, la série $\sum g_n(\omega)K(e_n)$ converge presque sûrement.

Un opérateur γ-radonifiant $K : \mathcal{H} \to X$ définit une unique mesure gaussienne, la distribution de la somme $\sum g_n(\omega)K(e_n)$, d'opérateur de covariance $R = KK^*$.

Si X est un espace de Hilbert, γ-radonifiants $=$ Hilbert-Schmidt.

En règle générale, K est γ-radonifiant dès que $\sum_n \|Ke_n\| < +\infty$.

Opérateurs γ-radonifiants

Soit (g_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant $\mathcal{N}(0,1)$.

Définition

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. Un opérateur $K \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}, X)$ est dit γ-**radonifiant** si pour une (pour toute) base orthonormale (e_n) de $\mathcal{H}$, la série $\sum g_n(\omega)K(e_n)$ converge presque sûrement.

Un opérateur γ-radonifiant $K : \mathcal{H} \to X$ définit une unique mesure gaussienne, la distribution de la somme $\sum g_n(\omega)K(e_n)$, d'opérateur de covariance $R = KK^*$.

Si X est un espace de Hilbert, γ-radonifiants $=$ Hilbert-Schmidt.

En règle générale, K est γ-radonifiant dès que $\sum_n \|Ke_n\| < +\infty$.

Opérateurs γ-radonifiants

Soit (g_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant $\mathcal{N}(0,1)$.

Définition

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. Un opérateur $K \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}, X)$ est dit γ-**radonifiant** si pour une (pour toute) base orthonormale (e_n) de $\mathcal{H}$, la série $\sum g_n(\omega)K(e_n)$ converge presque sûrement.

Un opérateur γ-radonifiant $K : \mathcal{H} \to X$ définit une unique mesure gaussienne, la distribution de la somme $\sum g_n(\omega)K(e_n)$, d'opérateur de covariance $R = KK^*$.

Si X est un espace de Hilbert, γ-radonifiants $=$ Hilbert-Schmidt.

En règle générale, K est γ-radonifiant dès que $\sum_n \|Ke_n\| < +\infty$.

$\mathbb{T}$-vecteur propre

Définition

Un vecteur $x \in X$ est un $\mathbb{T}$-**vecteur propre** pour T si $T(x) = \lambda x$ pour un $\lambda \in \mathbb{T}$.

Un $\mathbb{T}$-champ pour T sur l'espace mesuré (Ω, m) est un couple d'applications (E, ϕ) tels que

- $E : (\Omega, m) \to X$ est un champ de vecteurs ;
- $\phi : \Omega \to \mathbb{T}$ est mesurable ;
- $TE(\omega) = \phi(\omega)E(\omega)$ pour chaque $\omega \in \Omega$.

Étant donné un $\mathbb{T}$-champ (E, ϕ), on définit $K_E : L^2(\Omega, m) \to X$ par

$$K_E f = \int_\Omega f(\omega)E(\omega)dm(\omega).$$

K_E est un bon candidat pour être l'opérateur γ-radonifiant que l'on cherche...

$\mathbb{T}$-vecteur propre

Définition

Un vecteur $x \in X$ est un $\mathbb{T}$-**vecteur propre** pour T si $T(x) = \lambda x$ pour un $\lambda \in \mathbb{T}$.

Un $\mathbb{T}$-champ pour T sur l'espace mesuré (Ω, m) est un couple d'applications (E, ϕ) tels que

- $E : (\Omega, m) \to X$ est un champ de vecteurs ;
- $\phi : \Omega \to \mathbb{T}$ est mesurable ;
- $TE(\omega) = \phi(\omega)E(\omega)$ pour chaque $\omega \in \Omega$.

Étant donné un $\mathbb{T}$-champ (E, ϕ), on définit $K_E : L^2(\Omega, m) \to X$ par

$$K_E f = \int_\Omega f(\omega)E(\omega)dm(\omega).$$

K_E est un bon candidat pour être l'opérateur γ-radonifiant que l'on cherche...

$\mathbb{T}$-vecteur propre

Définition

Un vecteur $x \in X$ est un $\mathbb{T}$-**vecteur propre** pour T si $T(x) = \lambda x$ pour un $\lambda \in \mathbb{T}$.

Un $\mathbb{T}$-champ pour T sur l'espace mesuré (Ω, m) est un couple d'applications (E, ϕ) tels que

- $E : (\Omega, m) \to X$ est un champ de vecteurs ;
- $\phi : \Omega \to \mathbb{T}$ est mesurable ;
- $TE(\omega) = \phi(\omega)E(\omega)$ pour chaque $\omega \in \Omega$.

Étant donné un $\mathbb{T}$-champ (E, ϕ), on définit $K_E : L^2(\Omega, m) \to X$ par

$$K_E f = \int_\Omega f(\omega)E(\omega)dm(\omega).$$

K_E est un bon candidat pour être l'opérateur γ-radonifiant que l'on cherche...

Un cadre général - opérateurs faiblement mélangeants

Théorème (B-Matheron 2012)

Supposons qu'il existe un $\mathbb{T}$-champ (E, ϕ) pour T défini sur (Ω, m) tel que

1. *l'opérateur $K_E : L^2(\Omega, m) \to X$ est γ-radonifiant ;*
2. *E est m-dense ;*
3. *Pour tout $f \in L^1(\Omega, m)$, la mesure image $\sigma_f = (fm) \circ \phi^{-1}$ est une mesure continue sur $\mathbb{T}$.*

Alors il existe une mesure gaussienne T-invariante μ sur X, non dégénérée, telle que (T, μ) est faiblement mélangeant.

$$K_E f = \int_\Omega f(\omega) E(\omega) dm(\omega).$$

Mélange faible et (toutes) petites parties du cercle

Définition

On dit que les $\mathbb{T}$-vecteurs propres de T **engendrent parfaitement** X si pour toute partie dense $D \subset \mathbb{T}$, l'espace engendré par $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{T} \setminus D} \ker(T - \lambda)$ est dense dans X.

Théorème (B-Matheron 2012)

Supposons que les $\mathbb{T}$-vecteurs propres de T engendrent parfaitement l'espace. Alors il existe une mesure gaussienne T-invariante μ sur X, non dégénérée, telle que (T, μ) est faiblement mélangeant.

Mélange faible et (toutes) petites parties du cercle

Définition

On dit que les $\mathbb{T}$-vecteurs propres de T **engendrent parfaitement** X si pour toute partie dense $D \subset \mathbb{T}$, l'espace engendré par $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{T} \setminus D} \ker(T - \lambda)$ est dense dans X.

Théorème (B-Matheron 2012)

Supposons que les $\mathbb{T}$-vecteurs propres de T engendrent parfaitement l'espace. Alors il existe une mesure gaussienne T-invariante μ sur X, non dégénérée, telle que (T, μ) est faiblement mélangeant.

Idée de la preuve

Hypothèse : pour toute partie dénombrable $D \subset \mathbb{T}$, l'espace vectoriel engendré par $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{T} \setminus D} \ker(T - \lambda)$ est dense dans X.

But : Construire un $\mathbb{T}$-champ (E, ϕ) sur un espace mesuré (Ω, m) tel que

1. l'opérateur $K_E : L^2(\Omega, m) \to X$ is γ-radonifiant ;
2. E est m-dense ;
3. pour tout $f \in L^1(\Omega, m)$, la mesure image $\sigma_f = (fm) \circ \phi^{-1}$ est une mesure continue sur $\mathbb{T}$.

$(\Omega, m) = (\mathbb{T}, d\lambda)$: 1. est difficile à vérifier.

$m =$ mesure discrète : 3. est faux.

Solution : Ω est une réunion d'ensembles de Cantor.

Idée de la preuve

Hypothèse : pour toute partie dénombrable $D \subset \mathbb{T}$, l'espace vectoriel engendré par $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{T} \setminus D} \ker(T - \lambda)$ est dense dans X.

But : Construire un $\mathbb{T}$-champ (E, ϕ) sur un espace mesuré (Ω, m) tel que

1. l'opérateur $K_E : L^2(\Omega, m) \to X$ is γ-radonifiant ;
2. E est m-dense ;
3. pour tout $f \in L^1(\Omega, m)$, la mesure image $\sigma_f = (fm) \circ \phi^{-1}$ est une mesure continue sur $\mathbb{T}$.

$(\Omega, m) = (\mathbb{T}, d\lambda)$: 1. est difficile à vérifier.

$m =$ mesure discrète : 3. est faux.

Solution : Ω est une réunion d'ensembles de Cantor.

Idée de la preuve

Hypothèse : pour toute partie dénombrable $D \subset \mathbb{T}$, l'espace vectoriel engendré par $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{T} \setminus D} \ker(T - \lambda)$ est dense dans X.

But : Construire un $\mathbb{T}$-champ (E, ϕ) sur un espace mesuré (Ω, m) tel que

1. l'opérateur $K_E : L^2(\Omega, m) \to X$ is γ-radonifiant ;
2. E est m-dense ;
3. pour tout $f \in L^1(\Omega, m)$, la mesure image $\sigma_f = (fm) \circ \phi^{-1}$ est une mesure continue sur $\mathbb{T}$.

$(\Omega, m) = (\mathbb{T}, d\lambda)$: 1. est difficile à vérifier.
$m =$ mesure discrète : 3. est faux.
Solution : Ω est une réunion d'ensembles de Cantor.

Idée de la preuve

Hypothèse : pour toute partie dénombrable $D \subset \mathbb{T}$, l'espace vectoriel engendré par $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{T} \setminus D} \ker(T - \lambda)$ est dense dans X.

But : Construire un $\mathbb{T}$-champ (E, ϕ) sur un espace mesuré (Ω, m) tel que

1. l'opérateur $K_E : L^2(\Omega, m) \to X$ is γ-radonifiant ;
2. E est m-dense ;
3. pour tout $f \in L^1(\Omega, m)$, la mesure image $\sigma_f = (fm) \circ \phi^{-1}$ est une mesure continue sur $\mathbb{T}$.

$(\Omega, m) = (\mathbb{T}, d\lambda)$: 1. est difficile à vérifier.
$m =$ mesure discrète : 3. est faux.
Solution : Ω est une réunion d'ensembles de Cantor.

Lemma

Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ dont les $\mathbb{T}$-vecteurs propres engendrent parfaitement l'espace. Soit aussi (ε_n) une suite de réels positifs. Il existe une suite d'homéomorphismes (ϕ_i) de $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ sur $\mathcal{C}_i \subset \mathbb{T}$ et une suite de fonctions continues (E_i), $E_i : \{-1,1\}^{\mathbb{N}} \to S_X$ tels que,

(a) *pour tout $i \geq 1$ et tout $s \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, $TE_i(s) = \phi_i(s)E_i(s)$;*

(b) *$span(E_i(s);\ i \geq 1,\ s \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}})$ est dense dans X ;*

(c) *pour tout $n \geq 1$, tout $(s_1, \dots, s_{n-1}) \in \{-1,1\}^{n-1}$, tout $s', s'' \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$,*

$$\|E_i(s_1, \dots, s_{n-1}, 1, s') - E_i(s_1, \dots, s_{n-1}, -1, s'')\| \leq \varepsilon_n.$$

Mélange fort et (pas si petites) parties du cercle

Définition

Une partie $D \subset \mathbb{T}$ est un **ensemble d'unicité étendue** si $\sigma(D) = 0$ pour toute mesure de Rajchman σ sur $\mathbb{T}$.

Définition

On dit que les $\mathbb{T}$-vecteurs propres de T engendrent **engendrent $\mathcal{M}_0$-parfaitement** X si, pour tout borélien d'unicité étendue $D \subset \mathbb{T}$, l'espace engendré par $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{T} \setminus D} \ker(T - \lambda)$ est dense dans X.

Théorème (B-Matheron 2012)

Supposons que les $\mathbb{T}$-vecteurs propres de T engendrent $\mathcal{M}_0$ parfaitement l'espace. Alors il existe une mesure gaussienne T-invariante μ sur X, non dégénérée, telle que (T, μ) est fortement mélangeant.

Mélange fort et (pas si petites) parties du cercle

Définition

Une partie $D \subset \mathbb{T}$ est un **ensemble d'unicité étendue** si $\sigma(D) = 0$ pour toute mesure de Rajchman σ sur $\mathbb{T}$.

Définition

On dit que les $\mathbb{T}$-vecteurs propres de T engendrent **engendrent $\mathcal{M}_0$-parfaitement** X si, pour tout borélien d'unicité étendue $D \subset \mathbb{T}$, l'espace engendré par $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{T} \setminus D} \ker(T - \lambda)$ est dense dans X.

Théorème (B-Matheron 2012)

Supposons que les $\mathbb{T}$-vecteurs propres de T engendrent $\mathcal{M}_0$ parfaitement l'espace. Alors il existe une mesure gaussienne T-invariante μ sur X, non dégénérée, telle que (T, μ) est fortement mélangeant.

Mélange fort et (pas si petites) parties du cercle

Définition

Une partie $D \subset \mathbb{T}$ est un **ensemble d'unicité étendue** si $\sigma(D) = 0$ pour toute mesure de Rajchman σ sur $\mathbb{T}$.

Définition

On dit que les $\mathbb{T}$-vecteurs propres de T engendrent **engendrent $\mathcal{M}_0$-parfaitement** X si, pour tout borélien d'unicité étendue $D \subset \mathbb{T}$, l'espace engendré par $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{T} \setminus D} \ker(T - \lambda)$ est dense dans X.

Théorème (B-Matheron 2012)

Supposons que les $\mathbb{T}$-vecteurs propres de T engendrent $\mathcal{M}_0$ parfaitement l'espace. Alors il existe une mesure gaussienne T-invariante μ sur X, non dégénérée, telle que (T, μ) est fortement mélangeant.

Exemple...

Soit $X = \ell^p(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n\geq 0};\ \sum_{n\geq 1} |x_n|^p < +\infty\}$, $1 \leq p < +\infty$.
Soit $\mathbf{w} = (w_n)$ une suite bornée de réels positifs. On définit

$$B_{\mathbf{w}}(x_n) = (w_1 x_1, w_2 x_2, \dots) = (w_{n+1} x_{n+1}).$$

Théorème (B-Ruzsa (201x))

Il existe une mesure μ non-dégénérée sur X telle que $(B_{\mathbf{w}}, \mu)$ est fortement mélangeant si et seulement si

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(w_1 \dots w_n)^p} < +\infty.$$

La réciproque

Théorème (B-Grivaux 2006)

Soit $T \in \mathfrak{L}(H)$ où H est un espace de **Hilbert** *séparable. Supposons qu'il existe une mesure gaussienne non dégénérée μ sur X telle que (T, μ) soit faiblement mélangeant. Alors les $\mathbb{T}$-vecteurs propres de X engendrent parfaitement l'espace.*

$$X = \mathcal{C}_0([0, 2\pi]) = \{f \in \mathcal{C}([0, 2\pi]; f(0) = 0\}.$$

$$Tf(t) = e^{it} f(t) - \int_0^t ie^{is} f(s)ds.$$

La réciproque

Théorème (B-Grivaux 2006)

Soit $T \in \mathfrak{L}(H)$ où H est un espace de **Hilbert** *séparable. Supposons qu'il existe une mesure gaussienne non dégénérée μ sur X telle que (T, μ) soit faiblement mélangeant. Alors les $\mathbb{T}$-vecteurs propres de X engendrent parfaitement l'espace.*

$$X = \mathcal{C}_0([0, 2\pi]) = \{f \in \mathcal{C}([0, 2\pi]; f(0) = 0\}.$$

$$Tf(t) = e^{it} f(t) - \int_0^t ie^{is} f(s) ds.$$

Et après... ?

Théorème (Birkhoff)

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace de probabilité et soit* $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ *qui préserve* μ *et tel que* (T, μ) *soit ergodique. Alors, pour tout* $f \in L^1(X, \mu)$*,*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) \xrightarrow{N \to \infty} \int_X f d\mu \quad \mu\text{-pp}$$

Peut-on espérer un théorème limite central ?

Et après... ?

Théorème (Birkhoff)

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité et soit $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ qui préserve μ et tel que (T, μ) soit ergodique. Alors, pour tout $f \in L^1(X, \mu)$,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) \xrightarrow{N \to \infty} \int_X f d\mu \quad \mu\text{-pp}$$

Peut-on espérer un théorème limite central ?

Et après... ?

Théorème (Volný, 1990)

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité et soit $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ qui préserve μ et tel que (T, μ) soit ergodique. Pour $f \in L_0^2(X, \mu)$, on note

$$S_N(f) = f + f \circ T + \cdots + f \circ T^{n-1}.$$

Alors il existe une partie $E \subset L_0^2(X, \mu)$ qui est un G_δ-dense telle que, pour tout $f \in E$ et toute mesure de probabilité ν sur $\mathbb{R}$ satisfaisant $\int_{\mathbb{R}} t d\nu(t) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} t^2 d\nu(t) = 1$, on peut trouver une suite d'entiers (N_k) tendant vers $+\infty$ et telle que $\frac{S_{N_k}}{\|S_{N_k}\|_2}$ converge en loi vers ν.

Cela dit, dans les cas "classiques", on arrive souvent à obtenir des résultats lorsque f est régulière (lipschitzienne,...).

Et après... ?

Théorème (Volný, 1990)

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité et soit $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ qui préserve μ et tel que (T, μ) soit ergodique. Pour $f \in L_0^2(X, \mu)$, on note

$$S_N(f) = f + f \circ T + \cdots + f \circ T^{n-1}.$$

Alors il existe une partie $E \subset L_0^2(X, \mu)$ qui est un G_δ-dense telle que, pour tout $f \in E$ et toute mesure de probabilité ν sur $\mathbb{R}$ satisfaisant $\int_{\mathbb{R}} t d\nu(t) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} t^2 d\nu(t) = 1$, on peut trouver une suite d'entiers (N_k) tendant vers $+\infty$ et telle que $\frac{S_{N_k}}{\|S_{N_k}\|_2}$ converge en loi vers ν.

Cela dit, dans les cas "classiques", on arrive souvent à obtenir des résultats lorsque f est régulière (lipschitzienne,...).

Merci !